باعرض معذرت سوال ۳ و ۴ جابجا نوشته شده اند.

نام و نام خانوادگی ......مریم محبوبی...... **پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره** ...۲۶... **کلاس** ....دوازدهم ریاضی....

۱۹/۷۵ آفرین عالی نوشتی!

۱

$f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}$ تعیین علامت:

	-1		0		1	
	+		−		+	−

max نسبی: $0 \quad \frac12 \quad 1$

$x>0 \to f(x)=\sqrt{x-x^2} \xrightarrow{0\le x\le 1} f'(x)=\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{x-x^2}}=0 \to x=\frac12$ در دامنه هست

نقطه ۰ و ۱ بحرانی — مخرج را صفر می‌کند و مشتق در این نقاط تعریف نشده

$x<0 \to f(x)=\sqrt{x+x^2} \xrightarrow{x\le -1} f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x+x^2}}=0 \to x=-\frac12$ ~~در دامنه هست~~ در دامنه نیست

نقطه ۰ و ۱- بحرانی

در نتیجه $1=m$ و $x=\frac12$ و $x=0$ و $x=-1$ طول نقاط بحرانی تابع و $x=\frac12$ max نسبی و تابع min نسبی ندارد.

$m+n+k=1+0+4=5$

(۲)

۲

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x}$

$x\ge 0$ ② $a-2x\ge 0 \quad a\ge 2x \to \frac a2\ge x$ ① ①∩② $\to 0\le x\le \frac a2$

$f(0)=\sqrt a$ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt x}+\dfrac{-2}{2\sqrt{a-2x}}=0 \to \sqrt{a-2x}=2\sqrt x$ به توان ۲

$a-2x=4x \to a=6x$ $x=\frac a6$

$f(\frac a2)=\sqrt{\frac a2}$ min

$f(\frac a6)=\sqrt{\frac a6}+\sqrt{\frac{4a}{6}}=3\sqrt{\frac a6}$ max $\to \sqrt{\frac a2}\times 3\sqrt{\frac a6}=\sqrt{12}$

$\frac{3a}{\sqrt{12}}=\sqrt{12} \to 3a=12 \to a=4$ $[a]=4$

(۲)

۴

$y=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(0)=0 \to c=0$ $f(0)=0 \to d=0$

$f'(1)=0 \to 3a+2b=0$ ② $f(1)=1 \to a+b=1$ ① $\to$ ① و ② : $a+b=1$ ، $3a+2b=0$

$a+b=1 \xrightarrow{\times 2} -\begin{cases} 2a+2b=2 \\ 3a+2b=0\end{cases}$ $\left.\begin{matrix} a=-2 \\ b=3\end{matrix}\right\}$ $ab=3\times -2=-6$

(۲)

۳

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|$

ریشه های درون قدر مطلق نقاط بحرانی: $x^2=4$ ، $x=\pm 2$

min نسبی: $x=-2$ و $x=2$ و $x=0$ max نسبی

تابع را بدون قدر مطلق می‌نویسیم: $y=\dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \to x^4-4x^2$

$y'=\dfrac{(4x^3-8x)(x^2-1)-2x(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}$

$\dfrac{4x^5-4x^3-\cancel{8x^3}+8x-2x^5+\cancel{8x^3}}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. یک نقطه‌ی $x=0$ max نسبی دارد.

(۲)

۵

$f(x)=x|3-x^2|$ ⇐ نقطه ۱٫۵- و $\sqrt3$ ابتدا و انتهای بازه هستند $[-1.5 , \sqrt3]$

پس بحرانی هستند ⇐ ریشه‌های داخل قدر مطلق: $3-x^2=0$ ، $3=x^2 \to x=\sqrt3$ ق ق ، $x=-\sqrt3$ غ ق ق

$f(x)=x(3-x^2)=-x^3+3x$

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x^2-1)=0 \to x=1 ,\ x=-1$

$f(1)=2$ $f(-1.5)=-\frac98$

$f(-1)=-2 \to$ min مطلق $f(\sqrt3)=0$

min مطلق تابع به ازای $x=-1$ بدست آید که مقدار آن ۲- است.

(۲)

۶

$y = x^2|x| + 3ax^2 + b$

اکسترمم نسبی $A(-1,1)$

به ازای $x=-1$ قدر مطلق x منفی است پس $-x^3 + 3ax^2 + b$

$f(-1) = 1$ ①

$f'(-1) = 0$ ②

$f'(x) = -3x^2 + 6ax$

① $1 + 3a + b = 1 \to \boxed{3a+b=0}$

② $-3x^2 + 6ax \xrightarrow{x=-1} -3 - 6a = 0$

$6a = -3$

$a = -\frac{1}{2}$

$3a + b = 0 \to -\frac{3}{2} + b = 0 \to b = \frac{3}{2}$

$\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = \boxed{-3}$

۲

۷

$y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6} \to y' = 3x + 1 = 0 \to x = -\frac{1}{3}$

$(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

جانب قائم

جانب افقی

$\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$y = \frac{ax + 3}{(a+1)x + (a-1)}$

$\frac{ax+b}{cx+d}$: جانب قائم $= -\frac{d}{c}$، جانب افقی $= \frac{a}{c}$

$\frac{a}{a+1} = +\frac{2}{3} \to 3a = 2a + 2 \to \boxed{a = 2}$

۲

$y = \frac{2x+3}{3x+1}$

محور xها را در نقطه‌ای با عرض صفر قطع می‌کند

$\frac{2x+3}{3x+1} = 0 \to 2x + 3 = 0 \to \cancel{x} = -\frac{3}{2}$

۸

$y = \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + ax + 1}$

مجانب‌های تابع در نقطه $(-\frac{1}{2}, 3)$ متقاطع اند.

① $x = -\frac{1}{2}$ مجانب قائم و ریشه مخرج کند

$y = 3$ مجانب افقی است.

1) $4x^2 + ax + 1 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} 4(-\frac{1}{2})^2 + a(-\frac{1}{2}) + 1 = 0$

$1 - \frac{a}{2} + 1 = 0$

$\frac{a}{2} = 2$

$a = 4$

$\lim_{x\to\infty} \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + 4x + 1} = 3 \to \frac{bx^2}{4x^2} = \frac{b}{4} = 3 \to \boxed{b = 12}$

$\frac{b}{a} = \frac{12}{4} = \boxed{3}$

۲

۹

$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 8}$

از تابع مشتق می‌گیریم و جایی که $f'(x) > 0$ تابع اکیداً صعودی و جایی که $f'(x) < 0$ تابع اکیداً نزولی است.

$f'(x) = \frac{4x^3(x^3-8) - 3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2} = \frac{4x^6 - 32x^3 - 3x^6}{(x^3-8)^2} = \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3-8)^2} = \frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$

		0		2		$\sqrt[3]{32}$	
f'	$-$		$+$		$-$		$+$

طولانی‌ترین بازه $(2, 2\sqrt[3]{4})$ $\xrightarrow{\text{طول}}$ $2\sqrt[3]{4} - 2$

۲

۱۰

$f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 3}$ $\quad x \in (-2, 2)$

چون جواب ها بر عددی نشد من سوال را چک کردم در سوالات کنکور و دیدم مخرج x^2-2 بوده است.

مشتق می‌گیریم $f'(x) = \frac{4x^3(x^2-2) - 2x(x^4-3)}{(x^2-2)^2} = \frac{4x^5 - 8x^3 - 2x^5 + 6x}{(x^2-2)^2}$

$= \frac{2x^5 - 8x^3 + 6x}{(x^2-2)^2} = \frac{2x(x^4 - 4x^2 + 3)}{(x^2-2)^2} = \frac{2x(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2-2)^2}$

تعیین علامت می‌کنیم هرجا f' منفی شد در آن بازه اکید نزولی است

-2		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		2
	$-$ ①		$+$		$+$		$-$ ②		$+$		$-$ ③		$-$ ④		$+$	

تابع در ۴ بازه‌ی مشخص شده اکیداً نزولی است.

۱٫۷۵

راه دوم در انتهای pdf

$$f(x) = \frac{x^4-3}{x^2-3} \qquad x \in (-2,2) \qquad -10$$

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-3) - 2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2} = \frac{4x^5 - 12x^3 - 2x^5 + 6x}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{2x^5 - 12x^3 + 6x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x(x^4 - 6x^2 + 3)}{(x^2-3)^2}$$

$$x^2 = \frac{6 \pm \overbrace{\sqrt{36-12}}^{2\sqrt{6}}}{2} = 3 \pm \sqrt{6}$$

ریشه ندارد

$$\frac{(x^2-3-\sqrt{6})(x^2+3+\sqrt{6})\,2x}{(x^2-3)^2}$$

بد عدد می‌شود

$$\begin{array}{ccccccccccccc} -2 & & -\sqrt{3+\sqrt{6}} & & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & & \sqrt{3+\sqrt{6}} & & 2 \\ & - & & + & & + & & - & & - & & + & \end{array}$$

۳ بازه :)

۱۰

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-3) - 2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2} = \frac{2x[(2x^4-6x^2) - (x^4-3)]}{(x^2-3)^2}$$

$$2x^5 - 12x^3 + 6x = 0 \longrightarrow 2x(x^4 - 6x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 6t + 3 = 0 \longrightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} \longrightarrow x = \pm\sqrt{3-\sqrt{6}}$$

$$-2 < x < 2$$

-2		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		$\cancel{\sqrt{3}}$	
	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

در ۳ بازه اکیداً نزولی است!