۱۸٫۵

حل تشریحی

(۱)

$f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}$

$x\geq 0: \sqrt{x-x^2} \Rightarrow f'=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$

$x<0: \sqrt{x+x^2} \Rightarrow f'=\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}$

نقاط بحرانی: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$

۰٫۵

(۲)

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-2}{2\sqrt{a-2x}}=\frac{\sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{a-2x}}=0$

$\sqrt{a-2x}=2\sqrt{x}$

$a-2x=4x$

$f(0)=\sqrt{a}$

$f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}}$

$f(\frac{a}{6})=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{a}{3}}... = \sqrt{\frac{3a}{2}}$

$x=0, \frac{a}{2}, \frac{a}{6}$

$\sqrt{\frac{3a}{2}}=\sqrt{12}$ ، $a^2 ... =12$

$a=\sqrt{12}$ ... $[a]=8$

۱٫۵

(۳)

$-2<x<2: \frac{x^2(4-x^2)}{x^2-1}=\frac{-x^4+4x^2}{x^2-1} \rightarrow f'(x)=(-4x^3+8x)(x^2-1)$

$2<x$

$x<-2: \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1}=\frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$

۱٫۵

(۴)

$y'=3ax^2+2bx+c \xrightarrow{x=1} 3a+2b+c=0 \Rightarrow 3a+2b=0$

$\xrightarrow{x=0} c=0$

$x=1: y=a+b+c+d=1 \rightarrow a+b=1$

$x=0 \rightarrow y=d=0$

$3a+2b=0$

$3a+3b=3 \rightarrow a=-2,\ b=3$

$3\times -2=-6$

۲

(۵)

$3<x^2$

$\sqrt{3}<x$

$x<-\sqrt{3}$

$: x(x^2-3)=x^3-3x \Rightarrow f'(x)=3x^2-3=0 \rightarrow x=1$ قق، $x=-1$ قق

$x^2<3: -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}: x(3-x^2)=-x^3+3x \Rightarrow f'(x)=-3x^2+3 \rightarrow x=1$ قق، $x=-1$ قق

y'	+	−	+	−	+
y	↗	↘	↗	↘	↗

$x=1 \rightarrow f(1)=1(3-1)=2$

۲

(۶)

$x\geq 0: x^3+3ax^2+b \quad y'=3x^2+6ax=0 \quad 3x(x+2a) \rightarrow x=0,\ x=-2a$

$x<0: -x^3+3ax^2+b \quad y'=-3x^2+6ax=0 \quad -3x(x-2a) \rightarrow x=0,\ x=2a$

$x=2a=-1 \quad a=-\frac{1}{2}$

$1=y=1+3\times -\frac{1}{2}\times 1+b$

$1=1-\frac{3}{2}+b \Rightarrow \frac{3}{2}=b$

$\frac{b}{a}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-3$

۲

(۷)

$y'=2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$\min\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{matrix}\right.$ $\quad y_{min}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{a}{4}$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{a}{4}$

$\frac{-a-1+2a-2}{2}=0$

$2a-4=0 \rightarrow a=2$

$\frac{2x+2}{2x+1}=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$

۲

(۸)

$\frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3$

$y'=\frac{(2bx)(4x^2+ax+1)-(8x+a)(bx^2+7)}{(4x^2+ax+1)^2}$

$8bx^3+2abx^2+2bx-8bx^3-abx^2-56x-7a$ $\quad b=12,\ \frac{b}{a}=3$

$=\frac{abx^2+(2b-56)x-7a}{(4x^2+ax+1)^2}$

$a=4$

۲

(۹)

$f(x)=\frac{x^4}{x^2-8} \longrightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^2-8)-2x(x^4)}{(x^2-8)^2}=\frac{4x^5-32x^3-2x^5}{(x^2-8)^2}$

$=\frac{2x^5-32x^3}{(x^2-8)^2}=\frac{2x^3(x^2-16)}{(x^2-8)^2}$

x		−4		$-\sqrt{8}$		0		$\sqrt{8}$		4	
y'	−	0	+		+	0	−		−	0	+
y	↘		↗		↗		↘		↘		↗

بازه‌های کاهش: $(-\infty, ...)$

۲

(۱۰)

$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-3} \longrightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^2-3)-2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2}=\frac{4x^5-12x^3-2x^5+6x}{x^4-6x^2+9}$

$=\frac{2x^5-12x^3+6x}{x^4-6x^2+9}=\frac{2x(x^4-6x^2+3)}{x^4-6x^2+9}$

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	−	+	0	+	+	+
y	↘	↗		↗	↗	↗

$1\sqrt{3}$

ماکزیمم: $(-\sqrt{3}, 0)$

۲

۱-

$x(1-|x|) \geq 0 \rightarrow D_f = (-\infty,-1] \cup [0,1]$

$f'(x) = \dfrac{1-2|x|}{2\sqrt{x(1-|x|)}} \rightarrow |x| = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$ (در دامنه نیست $x=-\frac{1}{2}$)

x		$\frac{1}{2}$	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$

$n=0$

$m=1$

نقاط ۰ و ±۱ و برای $\frac{1}{2}$ ← $k=4$

$m+n+k = 4+1 = 5$

۳-

$f(x) = \pm \dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \rightarrow f'(x) = \pm \dfrac{(4x^3-8x)(x^2-1) - (x^4-4x^2)2x}{(x^2-1)^2} = 0$

$\pm(2x^5 - 4x^3 + 8x) = 0 \rightarrow x = 0$

$\hookrightarrow x^4 - 2x^2 + 4 = 0$ (ریشه ندارد)

تعداد ۲ و ۲- ریشه‌های تک مطلق و نقطه‌ی صفر ریشه‌ی مشترک است پس 3 نقطه‌ی بحرانی دارد!

۲-

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x} \rightarrow D_f \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{2\sqrt{a-2x}} \xrightarrow{f'=0} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{a-2x}} \rightarrow 4x = a-2x \rightarrow x = \frac{a}{6}$

$x=0 \rightarrow f(0) = \sqrt{a}$

$x = \frac{a}{2} \rightarrow f(\frac{a}{2}) = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$ min نسبی

$x = \frac{a}{6} \rightarrow f(\frac{a}{6}) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{4a}{6}} = \dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{6}}$ max نسبی

min×max

$\dfrac{3 \times a}{\sqrt{12}} = \sqrt{12}$

$\hookrightarrow a = 4$