۱۵

پارسی زندی

سؤال ①

$(۳,۵)\quad f'(۳)=?\qquad \begin{matrix}(۳,۵)\\(۰,۱)\end{matrix} \Rightarrow f'(۳)=m=\frac{۱-۵}{۰-۳}=\frac{-۴}{-۳}=\boxed{\frac{۴}{۳}}$ ✓

④

سؤال ②

$f(x)=\sqrt{ax-1}\qquad (-۱,۱),(۲,۲)\qquad f(۵)=?$

$m=\frac{۲-۱}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}$ شیب خط مماس $\xrightarrow{\text{معادله خط}} y-۱=\frac{۱}{۳}(x+۱)\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}$

چون برخورد دارند $\sqrt{ax-1}=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۳\sqrt{ax-1}=x+۴\Rightarrow ۹(ax-۱)=x^۲+۸x+۱۶\Rightarrow$

$x^۲+(۸-۹a)x+۲۵=۰\Rightarrow \sqrt{b^۲-۴ac}=\sqrt{(۸-۹a)^۲-۴(۲۵)}=۰\Rightarrow (۸-۹a)^۲=۱۰۰$

$\Rightarrow \begin{cases} ۸-۹a=۱۰ \longrightarrow a=-\frac{۲}{۹} & \times \\ ۸-۹a=-۱۰ \longrightarrow a=۲ & ✓ \Rightarrow f(۵)=\sqrt{۹}=\boxed{۳} \end{cases}$ ✓

③

سؤال ③

$y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$

$۴y-۳x=n\Rightarrow ۴y=n+۳x\Rightarrow y=\frac{n}{۴}+\frac{۳}{۴}x\Rightarrow$ شیب خط $=\frac{۳}{۴}$

$m+n=?$

$y'=\frac{(۲x+m)(x+۳)-(x^۲+mx+۱)}{(x+۳)^۲}\Rightarrow y'(۱)=\frac{(۲+m)\times(۴)-(۱+m+۱)}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$

④

$\Rightarrow ۴(m+۲)-۲-m=۱۲\Rightarrow \boxed{m=۲}\Rightarrow y=\frac{x^۲+۲x+۱}{x+۳}\xrightarrow{x=۱} y=۱\Rightarrow A(۱,۱)$

نقطه تماس $(۱,۱)\xrightarrow{\text{در خط صدق}} ۴y-۳x=n\Rightarrow ۴-۳=n\Rightarrow \boxed{n=۱}$ ✓ $\qquad m+n=۲+۱=③$

سؤال ④

$f(x)=\frac{۲۷-\sin^۳x}{۹-\sin^۲x}\qquad ۳g'(\frac{۵\pi}{۳})-f'(\frac{۵\pi}{۳})=?$

$g(x)=\frac{۳}{۳+\sin x}$

$۳g(x)-f(x)=\frac{۹}{۳+\sin x}-\frac{\cancel{(۳-\sin x)}(۹+۳\sin x+\sin^۲x)}{(۳+\sin x)\cancel{(۳-\sin x)}}$

$=\frac{-\sin x\cancel{(۳+\sin x)}}{\cancel{۳+\sin x}}=-\sin x\Rightarrow ۳g'(x)-f'(x)=-\cos x$

$\Rightarrow -\cos\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow \textcircled{-\frac{۱}{۲}}$ ✓

④

سؤال ⑤

$f(x)=-\frac{1}{\sqrt[۵]{x+|x|}}$ $\quad g'(\sqrt[۵]{۲})f'(g(\sqrt[۵]{۲}))=?$

$g(x)=\frac{1}{x^{۵}+|x^{۵}|}$ $\quad (fog)'(x)=g'(x)\times f'(g(x)) \Rightarrow (fog)'(\sqrt[۵]{۲})=?$

اگر $x>0 \Rightarrow g(x)=\frac{1}{۲x^{۵}}$, $f(x)=\frac{-1}{\sqrt[۵]{۲x}} \longrightarrow fog(x)=\frac{-1}{\sqrt[۵]{\frac{۲}{۲x^{۵}}}}=\frac{-1}{\frac{1}{x}}=-x$

$\Rightarrow (fog)'(x)=-1 \Rightarrow (fog)'(\sqrt[۵]{۲})=\boxed{\cancel{-1}}$ ③

سؤال ⑥

$f(x)=\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^{۲}$, $f(x)=xg(x)+1$ $\quad \lim_{x\to 0} g(x)=?$

①

$\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^{۲}=xg(x)+1 \Rightarrow xg(x)=\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^{۲}-1$

سؤال ⑦

$y=x^{۲}+1$

قرینه $\rightsquigarrow y=-x^{۲}-1 \Rightarrow$ خط ها بر هم عمودند $\Rightarrow f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-1$

$f(x)=-x^{۲}-1 \Rightarrow f'(x)=-۲x$

$\Rightarrow (-۲\alpha)\times(۲\alpha)=-1 \Rightarrow -۴\alpha^{۲}=-1 \Rightarrow \alpha^{۲}=\frac{1}{۴} \Rightarrow \alpha=\pm\frac{1}{۲}$

$\Rightarrow f(\alpha)=f(-\alpha)=-\alpha^{۲}-1=-\frac{1}{۴}-1=-\frac{۵}{۴} \Rightarrow y=-\frac{۵}{۴} \Rightarrow$

رأس
فاصله از سهمی $\frac{۵}{۴}$ ✓ ②
از خط d

سؤال ⑩

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^{۲}-1}} \Rightarrow g(x)=(x^{۲}-1)^{-\frac{1}{۲}} \Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{۲}(x^{۲}-1)^{-۳/۲}\times ۲x \Rightarrow g'(\sqrt{۵}\cancel{۲})=-۴\sqrt{۵}$

$f(x)=(x[x])^{۳} \rightsquigarrow x\to ۲^{+} \Rightarrow [۲^{+}]=۲ \Rightarrow f(x)=(۲x)^{۳} \Rightarrow f(x)=۸x^{۳} \Rightarrow f'(x)=۲۴x^{۲}$

$fog \quad x=\frac{\sqrt{۵}}{۲} \quad \Rightarrow f'(۲^{+})=۹۶$ ③

$f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^{-}))\times g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^{-})=۲۴\times۴\times-۴\sqrt{۵}=۸(-۴۸\sqrt{۵})$ ✓

۶

$$g(x) = \frac{f(x)-۱}{x} \rightarrow \lim_{x\rightarrow ۰} g(x) = f'(۰)$$

$$f'(x) = \frac{۲}{(۱+\sin x)^۲} \times \cos x \times ۲\left(\frac{\sin x-۱}{۱+\sin x}\right) \rightarrow f'(۰) = \frac{۲}{۱} \times ۱ \times -۲ = \boxed{-۴}$$

۸

$$f(x) = ۸x^{\frac{۵}{۲}} + ۶x^{\frac{۱}{۲}} \rightarrow f'(x) = ۲۰x^{\frac{۳}{۲}} + ۳x^{-\frac{۱}{۲}}$$

معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $x=a$ برابر است با:

$$y - ۲\sqrt{a}(۴a^۲+۳) = \frac{۲۰a^۲+۳}{\sqrt{a}}(x-a)$$

$$x, y = ۰ \rightsquigarrow \cancel{-}۲\sqrt{a}(۴a^۲+۳) = \frac{۲۰a^۲+۳}{\sqrt{a}}(\cancel{-}a) \rightsquigarrow ۲\cancel{a}(۴a^۲+۳) = ۲۰a^۲+۳(\cancel{a})$$

$$۸a^۲+۶ = ۲۰a^۲+۳ \rightarrow ۱۲a^۲ = ۳ \rightarrow \boxed{a = \pm\frac{۱}{۲}} \rightsquigarrow a>۰ \rightsquigarrow a = \frac{۱}{۲}$$

$$m = ۲۰(۲^{-۱\times\frac{۳}{۲}}) + ۳(۲^{-۱(-\frac{۱}{۲})}) = \boxed{۸\sqrt{۲}}$$

۹

$$y = mx \rightarrow \frac{\sqrt{a}}{-۲a^۲+a+۱} = ma \rightarrow \frac{۱}{-۲a^۲+a+۱} = m\sqrt{a}$$

$$m\sqrt{a}(-۲a^۲+a+۱) = ۱ \rightarrow -۲m(a^{\frac{۵}{۲}}) + m(a^{\frac{۳}{۲}}) + m(a)^{\frac{۱}{۲}} = ۱ \quad \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$-۵m(a^{\frac{۳}{۲}}) + \frac{۳}{۲}m(a^{\frac{۱}{۲}}) + \frac{m}{۲}(a^{-\frac{۱}{۲}}) = ۰$$

$$\frac{m}{۲}(a^{-\frac{۱}{۲}})(-۱۰a^۲+۳a+۱) = ۰ \rightarrow a = -\frac{۱}{۵} \text{ یا } \overset{\checkmark}{a = \frac{۱}{۲}} \; (a>۰)$$

$$f(a) = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-۲(\frac{۱}{۴})+\frac{۱}{۲}+۱} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱} = \boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$