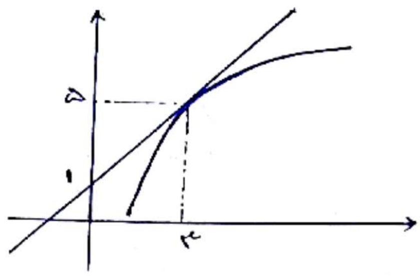
نام و نام خانوادگی ....[illegible].... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۲۴... کلاس .....دوازدهم [illegible]

۱۹/۵ آفرین

۱



$$f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$$

۲

۲

خط مماس بر منحنی در نقطه A همان شیب منحنی در نقطه‌ی A است. با استفاده از اطلاعات مسئله می‌توان معادله‌ی خط مماس را به دست آورد!

$f(x) = \sqrt{ax-1}$ معادله‌ی خط $= y = ax+b \rightarrow \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3} = a$ و $b = \frac{4}{3}$

خط مماس $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$ است و $f(x)$ را در یک نقطه قطع کرده پس نقطه‌ی $(x, \frac{x}{3}+\frac{4}{3})$ در $f(x)$ صدق می‌کند.

۲

$$\sqrt{ax-1} = \frac{x}{3}+\frac{4}{3} \rightarrow 3\sqrt{ax-1} = x+4 \rightarrow 9ax-9 = x^2+8x+16 \rightarrow x^2+(8-9a)x+25=0 \rightarrow \Delta = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 0 \rightarrow (8-9a)^2 - 100 = 0 \rightarrow |8-9a| = 10$$

$\rightarrow a = -\frac{2}{9}$ غیرقابل قبول چون در این صورت $f(5)$ تعریف نشده می‌شود

$\rightarrow a = 2 \rightarrow$ قابل قبول $\rightarrow f(5) = \sqrt{2(5)-1} = 3$

۳

$$4y = 3x+n \rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4}$$

می‌دانیم مشتق تابع در نقطه‌ی $x=1$، $\frac{3}{4}$ است! $\leftarrow$

$$f'(x) = \frac{(2x+m)(x+3)-(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$$

$$\rightarrow = \frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2} \xrightarrow{x=1} \frac{6+3m}{16} = \frac{3}{4} \rightarrow m=2$$

اگر نقطه‌ی $x=1$ را در $f(x)$ قرار دهیم نقطه‌ی تماس دو تابع به دست می‌آید:

$$f(1) = \frac{1+2+1}{4} = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x+\frac{n}{4} \xrightarrow{(1,1)} \frac{3}{4}+\frac{n}{4} = 1 \rightarrow n=1$$

۲

$$m+n=3$$

۴

$$f(x) = \frac{\cancel{(3-\sin x)}(\sin^2 x+9+3\sin x)}{\cancel{(3-\sin x)}(3+\sin x)} \quad , \quad 3g(x) = \frac{9}{3+\sin x}$$

$$3g(\tfrac{5\pi}{3}) - f(\tfrac{5\pi}{3}) = \frac{\cancel{9}-\sin^2 x-\cancel{9}-3\sin x}{3+\sin x} = \frac{-\sin x\,\cancel{(\sin x+3)}}{\cancel{\sin x+3}} = -\sin x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 3g'(\tfrac{5\pi}{3}) - f'(\tfrac{5\pi}{3}) = \left(-\sin\tfrac{5\pi}{3}\right)' = -\cos\tfrac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

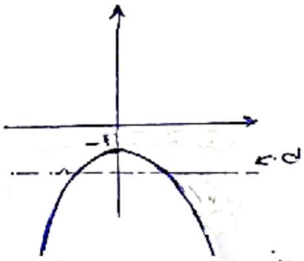
۲

۵

$$\rightarrow (f\circ g(\sqrt{2}))' \qquad g(x) = \frac{1}{x^5+|x|^5} \xrightarrow{x>0} g(x) = \frac{1}{2x^5} \ , \ f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{x+|x|}} \xrightarrow{g(x)>0} f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2x}}$$

$$f\circ g(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2\times\frac{1}{2x^5}}} = -x \quad \rightarrow (f\circ g(x))' = -1$$

۲

$g(x)=\frac{f(x)-1}{x} \xrightarrow{f(0)=1} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ $f'(x)=2\left(\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right)\times\cos x\times\frac{2}{(\sin x+1)^2} \xrightarrow{x=0} =-4$ ۲	۶
 قرینه منحنی x^2+1 نسبت به محور x : $y=-x^2-1$ چون منحنی شکل قرینه دارد برای اینکه شیب دو نقطه عمود بر هم باشند، این دو نقطه باید قرینه ی یکدیگر باشند. مشتق: $-2x$ $-2a\times 2a=-1 \to a^2=\frac{1}{4} \to a=\pm\frac{1}{2}$ پس عرض نقاط برابر بودند با: $-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}$ فاصله خط d از سهمی مفروض: $\frac{5}{4}$ ۲	۷
خط d برابر است با: $y=ax$ $f(x)=ax \to 2\sqrt{x}(4x^2+3)=a\cancel{x}^{\sqrt{x}} \to a=\frac{8x^2+6}{\sqrt{x}}$ $f'(x)=a \to 16x=\frac{a}{2\sqrt{x}} \to 16x=\frac{\frac{8x^2+6}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \to 32x^2=8x^2+6 \to x=\pm\frac{1}{2}$ چون $x>0$ است $x=\frac{1}{2}$ قابل قبول است. ← طول نقطه ی A بدست آمد برای بدست آوردن عرض این نقطه داریم: $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}\times(4\times\frac{1}{4}+3)=4\sqrt{2}$ ۱/۵	۸
$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1}=a\cancel{x}^{\sqrt{x}} \to a\sqrt{x}(-2x^2+x+1)-1=0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t}$ $at(-2t^4+t^2+1)-1=0 \to -2at^5+at^3+at-1=0$ $\xrightarrow{\text{مشتق}} -10\cancel{a}t^4+3\cancel{a}t^2+\cancel{a}=0 \to t^2=\frac{1}{2} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} x=\frac{1}{2}$ $\to t^2=\frac{-1}{5}$ غیرقابل قبول $f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲	۹
$(fog)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))$; $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow{x\to\frac{\sqrt{5}}{2}} g(x)=2^+$ $g'(x)=\frac{-1}{2}(x^2-1)^{\frac{-3}{2}}\times 2x \to g'(\frac{\sqrt{5}}{2})=-4\sqrt{5}$ $f(2^+)=8x^3 \to f'(2^+)=24x^2=96$ $g'(x)\times f'(g(x))=-4\sqrt{5}\times 96$ $\to \frac{-4\sqrt{5}\times 96}{-48\sqrt{5}}=8$ ۲	۱۰

۸

$f(x) = ۸x^{\frac{۵}{۲}} + ۶x^{\frac{۱}{۲}} \longrightarrow f'(x) = ۲۰\cdot x^{\frac{۳}{۲}} + ۳x^{-\frac{۱}{۲}}$

معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $x = a$ برابر است با:

$y - ۲\sqrt{a}(۴a^۲+۳) = \frac{۲۰\cdot a^۲ + ۳}{\sqrt{a}}(x-a)$

$x, y = ۰ \rightarrow \cancel{-}۲\sqrt{a}(۴a^۲+۳) = \frac{۲۰\cdot a^۲+۳}{\sqrt{a}}(\cancel{-}a) \rightarrow ۲\cancel{a}(۴a^۲+۳) = ۲۰\cdot a^۲ + ۳(\cancel{a})$

$۸a^۲ + ۶ = ۲۰\cdot a^۲ + ۳ \longrightarrow ۱۲a^۲ = ۳ \longrightarrow \boxed{a = \pm\frac{۱}{۲}} \rightarrow a > ۰ \rightarrow a = \frac{۱}{۲}$

$m = ۲۰(۲^{-۱\times\frac{۳}{۲}}) + ۳(۲^{-۱(-\frac{۱}{۲})}) = \boxed{۸\sqrt{۲}}$