نام و نام خانوادگی ...مریم معصومی... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۲۳... کلاس ...دوازدهم ریاضی...

۲۰ آفرین

۱

$f(\tan^2 x + \sqrt{2}\cos x) = g(x) \qquad g'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} \qquad f'(2)$

$g'(x) = (2\tan x(1+\tan^2 x) - \sqrt{2}\sin x)\, f'(\tan^2 x + \sqrt{2}\cos x)$

$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \sqrt{3} = \underbrace{(2(1)(1+1) - \underbrace{\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}}_{1})}_{3} \times f'(\underbrace{1 + \underbrace{\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}}_{1}}_{2}) \rightarrow 3 f'(2) = \sqrt{3}$

$\boxed{f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

۲

۲

$f(x) = \frac{8+\cos^3 x}{4-\cos^2 x} = \frac{\cancel{(2+\cos x)}(\cos^2 x - 2\cos x + 4)}{\cancel{(2+\cos x)}(2-\cos x)} = \frac{\cos^2 x - 2\cos x + 4}{2-\cos x}$

$g(x) = \frac{2}{2-\cos x}$

$f'(\frac{7\pi}{6}) - 2g'(\frac{7\pi}{6}) = (f-2g)' = \frac{\cos^2 x - 2\cos x + 4}{2-\cos x} - \frac{4}{2-\cos x} = \frac{\cos x(\cos x - 2)}{2-\cos x}$

$= -\cos x \xrightarrow{\text{مشتق}} \sin x \xrightarrow{x=\frac{7\pi}{6}} \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

۲

۳

$f'_+(\frac{3}{4}) = \lim_{x\to\frac{3}{4}^+} \frac{\cancel{(4x-3)}\sqrt{ax} - 0}{\underbrace{\frac{1}{4}\cancel{(4x-3)}}_{x-\frac{3}{4}}} = 4\sqrt{ax} \qquad f'_-(\frac{3}{4}) \Rightarrow \lim_{x\to\frac{3}{4}^-} \frac{-\cancel{(4x-3)}\sqrt{ax}}{\frac{1}{4}\cancel{(4x-3)}} = -4\sqrt{ax}$

$4\sqrt{ax} - (-4\sqrt{ax}) = 2\sqrt{6} \xrightarrow[x=\frac{3}{4}]{} 8\sqrt{a\times\frac{3}{4}} = 2\cancel{4}\sqrt{3a} = \cancel{2}\sqrt{6} \rightarrow 12a = 6$

$\downarrow$

$a = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

۲

۴

$y = -ax + 2 = g(x) \rightarrow$

چون در نقطه‌ای به طول ۴ بر نمودار مماس است

$g(4) = f(4)$

$g'(4) = f'(4)$

$g(4) = -4a + 2 = f(4)$

$g'(4) = -a = f'(4)$

$f(4) + f'(4) = -1$

$\downarrow$

$-4a + 2 + (-a) = -1 \rightarrow 5a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{5} \rightarrow f'(4) = -a = -\frac{3}{5}$

۲

۵

$7y = x + 5 \rightarrow 7y = \frac{7ax - 7}{3x+1}$

دو نمودار بر هم مماسند پس نقطه تماس آنها ریشه مضاعف دارد و

$x + 5 = \frac{7ax - 7}{3x+1} \longrightarrow 3x^2 + 16x + 5 = 7ax - 7$

$3x^2 + (16 - 7a)x + 12 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} (16-7a)^2 - \underbrace{4\times 3}_{12}\times 12 = 0 \qquad (16-7a)^2 = 12^2$

$16 - 7a = 12 \rightarrow 7a = 4 \rightarrow a = \frac{4}{7}$

$16 - 7a = -12 \rightarrow 7a = 28 \rightarrow a = 4$

چون نقطه تماس آن‌ها ناحیه اول است پس

$a = 4$

۲

۶

$f(x) = x^3 + ax - b$

چون در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور xها مماس است
پس نقطه ۲ هم صفر تابع و هم مشتق آن را صفر می‌کند

$f(2) = 0 \rightarrow 8 + 2a - b = 0$

$\downarrow$

$b - 2a = 8 \quad (1) \qquad b - 2(-12) = 8 \rightarrow b = -16$

$f'(2) = 0 \quad 3x^2 + a = 0 \rightarrow 12 + a = 0 \rightarrow a = -12$

$b - a = -16 - (-12) = -4$ ✓ (۲)

۷

$f(x) = \sin^n(x^2)$

$\lim \dfrac{f(x) \cdot f'(x)}{(1-\cos x)^m} = 32\sqrt{2} \quad \xrightarrow{\text{چون } x \to 0} \quad \sin(x^2) \sim x^2 \rightarrow f(x) = x^{2n}$

(۲) جواب نهایی ۹ ✓

صورت $f'(x) \sim 2n\, x^{2n-1} \rightarrow f(x) \cdot f'(x) \sim 2n\, x^{4n-1}$

مخرج $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \rightarrow (1-\cos x)^m \sim \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^m \rightarrow \dfrac{x^{2m}}{2^m}$

برای اینکه حد عدد ثابت و غیر صفر بشه باید توان x صفر بشه

$4n - 1 - 2m = 0 \rightarrow 2m = 4n - 1$

$m = \dfrac{4n-1}{2} \quad (1)$

$2^{m+1} n = 32\sqrt{2} \rightarrow 2^{m+1} n = 2^{\frac{11}{2}} \quad (1) \rightarrow n \times 2^{\frac{4n+1}{2}} = 2^{\frac{11}{2}} \xrightarrow[m=\frac{7}{2}]{n=2} 2m + n = 7 + 2 = 9$

۸

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = y \rightarrow \sqrt{x} = -\dfrac{-y-1}{y-1} \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{y+1}{y-1} \rightarrow y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

$f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 \longrightarrow (f^{-1}(2))' = 2\underbrace{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}_{3}\underbrace{\left(\dfrac{-2}{(x-1)^2}\right)}_{-2} = 2 \times 3 \times -2 = \boxed{-12}$ ✓

$2 \times \dfrac{2+1}{2-1} \times \dfrac{-2}{(2-1)^2}$

(۲)

۹

آهنگ تغییر متوسط تابع $[-1, 0]$ $= \dfrac{f(0) - f(-1)}{0-(-1)} = -11 \longrightarrow 1 - 8(-a+1) = -11 \qquad f(0) = 1 \quad f(-1) = 8(-a+1)$

$1 + 8a - 8 = -11 \rightarrow 8a = -4 \rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

$f'(-2a) \xrightarrow{a=-\frac{1}{2}} f'(1) = \left((x^2+1)^3(ax+1)\right)' \longrightarrow 3\overbrace{(x^2+1)^2}^{4}\overbrace{(2x)}^{2}\underbrace{(-\tfrac{1}{2}x+1)}_{\frac{1}{2}}$

$+ \underbrace{-\tfrac{1}{2} \times (x^2+1)^3}_{\underbrace{8}_{-4}}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای $= 4 \times 2 \times + \dfrac{1}{2} \times 3 - 4 = 12 - 4 = \boxed{8}$ ✓

۱۰

$f(x) = \sin x \cos 2x \rightarrow \dfrac{f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-1-0}{\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{4}{\pi} \quad (1)$

$f(\frac{\pi}{2}) = -1 \quad f(\frac{\pi}{4}) = 0$

$g(x) = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{(\cancel{\sin^2 x + \cos^2 x})}_{1} = -\cos 2x$

$g(\frac{\pi}{2}) = 1$

$g(\frac{\pi}{4}) = 0$

$\dfrac{g(\frac{\pi}{2}) - g(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1-0}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{4}{\pi} \quad (2)$ ✓

$\dfrac{(1)}{(2)} = \dfrac{-\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = \boxed{-1}$