نام و نام خانوادگی ....هانیه زهرا شیعی........ پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۳۲... کلاس ....دوازدهم بهشتی ها........

۱۹ آفرین

$g(x)=f(\tan^2x+\sqrt{2}\cos x)$ $\to g'(x)=\left(2\tan x(1+\tan^2x)-\sqrt{2}\sin x\right)\times f'(\tan^2x+\sqrt{2}\cos x)$ $\to g'(\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}=3\times f'(2) \quad \to f'(2)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲	۱
$f(x)=\frac{8+\cos^3x}{4-\cos^2x}=\frac{(\cos x+2)(\cos^2x-2\cos x+4)}{(\cancel{2+\cos x})(2-\cos x)} \qquad 2g(x)=\frac{4}{2-\cos x}$ $f(x)-2g(x)=\frac{\cancel{4}+\cos^2x-2\cos x-\cancel{4}}{2-\cos x}=\frac{\cos x(\cos x-2)}{-\cos x+2}=-\cos x \xrightarrow{\text{مشتق}} \sin x$ $\sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{1}{2}$ دقت کن :) ۱٫۷۵	۲
$f(x)=\begin{cases}(4x-3)\sqrt{ax} & x\geq\frac{3}{4}\\ (-4x+3)\sqrt{ax} & x<\frac{3}{4}\end{cases} \to f'(x)=\begin{cases}4\sqrt{ax}+\frac{a}{2\sqrt{ax}}\times(4x-3) & x>\frac{3}{4}\\ -4\sqrt{ax}+\frac{a}{2\sqrt{ax}}\times(-4x+3) & x<\frac{3}{4}\end{cases}$ اختلاف شیب ها در نقطه $x=\frac{3}{4}$: $4\sqrt{\frac{3}{4}a}+\frac{a}{2\sqrt{\frac{3}{4}a}}\times(0)-\left(-4\sqrt{\frac{3}{4}a}+\frac{a}{2\sqrt{a\times\frac{3}{4}}}\times(0)\right)=2\sqrt{6}$ $\to 8\sqrt{\frac{3}{4}a}=4\sqrt{3a}$ $4\sqrt{3a}=2\sqrt{6}\to a=\frac{1}{2}$ ۲	۳
$f(x)=-ax+2 \to f(4)=-4a+2$ $\to f'(4)=-a$ $\to f(4)+f'(4)=-1 \to -4a+2-a=-1\to a=\frac{3}{5}$ $f'(4)=-a=\frac{-3}{5}$ ۲	۴
$7y-x=5\to y=\frac{x}{7}+\frac{5}{7}$ چون این دو نمودار بهم مماس هستن پس نقطه ای بر روی هر دوی اینها صدق می‌کند که اگر طولش x باشد، عرضش $\frac{x}{7}+\frac{5}{7}$ است. $y=\frac{ax-1}{3x+1}=\frac{x+5}{7}\to 7ax-7=3x^2+x+15x+5\to 3x^2+(16-7a)x+12=0\to\Delta=0$ $\to(16-7a)^2-4\times3\times12=0\to a=\frac{4}{7}$ یا 4 ۲ شیب ها برابر است: $\frac{a(3x+1)-3(ax-1)}{(3x+1)^2}=\frac{1}{7}\to\frac{a+3}{9x^2+6x+1}=\frac{1}{7}\to 7a+21=9x^2+6x+1\to 9x^2+(6-7a)x-20=0$	۵

چون در ناحیه اول بر منحنی مماس بود: راس بین >0 ← $\frac{-b}{2a}>0$ ← اگر $a=4$ باشد اینگونه می‌شود.

۶

چون در نقطه‌ی $x=2$ بر محور xها مماس است یعنی هم نقطه‌ی $(2,0)$ در تابع f صدق می‌کند و مشتق تابع f در نقطه‌ی ۲ صفر است!

$f(2)=0 \rightarrow 8+2a-b=0 \rightarrow 2a-b=-8$

$f'(x)=3x^2+a \rightarrow f'(2)=0 \rightarrow 12+a=0 \rightarrow a=-12$ } $\rightarrow -24-b=-8 \rightarrow b=-16$

$\rightarrow b-a=-16-(-12)=-4$

۲

۷

$f'(0) \xrightarrow[\text{مشتق}]{\text{با تعریف}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sin^n(x^2)}{x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \dfrac{x^{2n}}{x} = x^{2n-1}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)f'(x)}{(1-\cos x)^m} = \dfrac{\sin^n(x^2)\, x^{2n-1}}{(1-\cos x)^m} = 32\sqrt{2} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \dfrac{x^{4n-1}}{x^{2m} \times 2^{-m}} = x^{4n-2m-1} \times 2^m$

توان x باید صفر باشد: $4n-2m-1=0$ و $32\sqrt{2}=2^m$ است پس $m=\frac{11}{2}$ و $4n-11-1=0 \rightarrow n=3$

$\rightarrow 2m+n = 2\times\frac{11}{2}+3=14$

۱٫۵

۸

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1}=1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1} \rightarrow f'(x)=\dfrac{-\cancel{2}}{(\sqrt{x}-1)^2}\times\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}$

$f'(2)=\dfrac{-1}{2-2\sqrt{2}+1}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{3\sqrt{2}-4}=\dfrac{-3\sqrt{2}-4}{2}$

۱٫۷۵

۹

آهنگ تغییر متوسط $=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \rightarrow \dfrac{f(-1)-f(0)}{-1-0}=\dfrac{-8a+8-1}{-1}=-11 \rightarrow -8a+7=11 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=1$ $\rightarrow$ همان مشتق تابع: $3(x^2+1)^2(2x)\left(\frac{-x}{2}+1\right)+\left(\frac{-1}{2}\right)\times(x^2+1)^3 \xrightarrow{x=1} =8$

۲

۱۰

آهنگ متوسط: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \rightarrow \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}\cos 2\times\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{2}\cos 2\times\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{\frac{-\pi}{4}}=\dfrac{-4}{\pi}$

$\hookrightarrow \sin^4x-\cos^4x=\sin^2x-\cos^2x=2\sin^2x-1 \rightarrow \dfrac{(2\sin^2\frac{\pi}{4}-1)-(2\sin^2\frac{\pi}{2}-1)}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}}$

$\rightarrow \dfrac{2\sin^2\frac{\pi}{4}-1-(2\sin^2\frac{\pi}{2}-1)}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}}=\dfrac{-1}{\frac{-\pi}{4}}=\dfrac{4}{\pi} \rightarrow \dfrac{\frac{-4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}}=-1$

۲

۷

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^n(x^2)\times 2x\sin^{n-1}(x^2)\times\cos x^2}{(2\sin^2\frac{x}{2})^m}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)^n\times n\times(x^2)^{n-1}\times 2x}{(2(\frac{x}{2})^2)^m}=\frac{(x)^{2n+2n-2+1}\times 2n}{(x)^{2m}\times\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2nx^{4n-1}}{\frac{1}{2^m}\times x^{2m}}=2^{m+1}\times n\times x^{4n-2m-1}$$

پس $4n-2m-1=0\to n=\frac{2m+1}{4}$

لذا $2^{m+1}\times\frac{2m+1}{4}=32\sqrt{2}\to m=\frac{7}{2}\,,\ n=2\to\boxed{2m+n=9}$

۸

$f^{-1}(2)=t\to f(t)=2\to\sqrt{t}+1=2\sqrt{t}-2\to\sqrt{t}=3\to t=9$

$f^{-1}{}'(2)=\frac{1}{f'(9)}$ و $f'(x)=\frac{-2}{(\sqrt{x}-1)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(9)=\frac{-2}{(2)^2}\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}\to\boxed{f^{-1}{}'(2)=-12}$