تینا جعفری پور   تکلیف ۲۳   دوازدهم دختر B

۱

$g(x)=f(\tan^2x+\sqrt{۲}\cos x)\Rightarrow g'(x)=f'(\tan^2x+\sqrt{۲}\cos x)\times(۲\tan x(۱+\tan^2x)-\sqrt{۲}\sin x)$

$\Rightarrow g'(\frac{\pi}{۴})=f'(۲)\times(۴-۱)=\sqrt{۳}\Rightarrow\boxed{f'(۲)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$

۲

$f(x)-۲g(x)=\frac{(۲+\cos x)(۴+\cos^2x-۲\cos x)}{۴-\cos^2x}-\frac{۴}{۲-\cos x}=\frac{\cos x(\cos x-۲)}{۲-\cos x}=-\cos x\Rightarrow f'(x)-۲g'(x)=\sin x$

$(۲-\cos x)$

$\Rightarrow f'(\frac{۷\pi}{۶})-۲g'(\frac{۷\pi}{۶})=\sin\frac{۷\pi}{۶}=\boxed{\frac{-۱}{۲}}$

۳

$x=\frac{۳}{۴}\begin{cases}f(x)=(۴x-۳)\sqrt{ax}\Rightarrow f'_+(\frac{۳}{۴})=۴\sqrt{\frac{۳}{۴}a}\\ f(x)=-(۴x-۳)\sqrt{ax}\Rightarrow f'_-(\frac{۳}{۴})=-۴\sqrt{\frac{۳}{۴}a}\end{cases}$ (مشتق حاصل ضربی)

$\Rightarrow\left|۴\sqrt{\frac{۳}{۴}a}-(-۴\sqrt{\frac{۳}{۴}a})\right|=\frac{۸\sqrt{۳a}}{۲}=۴\sqrt{۳a}=۲\sqrt{۶}$

$\Rightarrow\boxed{a=\frac{۱}{۲}}$

۴

$y+ax=۲\Rightarrow y=-ax+۲\Rightarrow\begin{cases}f'(۴)=-a\\ f(۴)=-۴a+۲\end{cases}\Rightarrow f(۴)+f'(۴)=-۵a+۲=-۱\Rightarrow a=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\boxed{f'(۴)=-\frac{۳}{۵}}$

۵

$y=\frac{ax-۱}{۳x+۱}\Rightarrow ۷y=\frac{۷ax-۷}{۳x+۱}=x+۵\Rightarrow ۷ax-۷=۳x^2+۱۶x+۵\Rightarrow ۳x^2+(۱۶-۷a)x+۱۲=۰\xrightarrow{\Delta=۰}(۱۶-۷a)^2-۴(۳)(۱۲)=۰$

چون مماس شده ریشه مضاعف دارد

$\Rightarrow ۲۵۶+۴۹a^2-۲۲۴a-۱۴۴=۰\Rightarrow ۴۹a^2-۲۲۴a+۱۱۲=۰\xrightarrow{\div۷}۷a^2-۳۲a+۱۶=(۷a-۴)(a-۴)=۰\begin{cases}a=۴\\ a=\frac{۴}{۷}\end{cases}$

$\boxed{a=۴}\Rightarrow ۳x^2+(۱۶-۲۸)x+۱۲=۳x^2-۱۲x+۱۲=۰\xrightarrow{\div۳}x^2-۴x+۴=(x-۲)^2=۰\Rightarrow x=۲\ ,y=۱$

$a=\frac{۴}{۷}\Rightarrow ۳x^2+(۱۶-۴)x+۱۲=۳x^2+۱۲x+۱۲=۰\xrightarrow{\div۳}x^2+۴x+۴=(x+۲)^2\Rightarrow x=-۲$ غ ق ق

ناحیه اول : $x>۰$ و $y>۰$

۶

$\begin{cases}f(۲)=۰\Rightarrow ۸+۲a-b=۰\Rightarrow b=-۱۶\\ f'(۲)=۰\Rightarrow f'(x)=۳x^2+a\Rightarrow f'(۲)=۱۲+a=۰\Rightarrow a=-۱۲\end{cases}\Rightarrow b-a=-۱۶-(-۱۲)=\boxed{-۴}$

۷

$f(x)=\sin^n(x^2)\Rightarrow f'(x)=n\sin^{(n-۱)}(x^2)\times\cos(x^2)\times۲x$

$\lim_{x\to۰}\frac{f(x)f'(x)}{(۱-\cos x)^m}=\lim_{x\to۰}\frac{\sin^n(x^2)\times۲nx\sin^{(n-۱)}(x^2)\times\cos(x^2)}{(۱-\cos x)^m}=\lim_{x\to۰}\frac{\sin^{(۲n-۱)}(x^2)\times۲nx\cos(x^2)}{(۱-\cos x)^m}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=}\lim_{x\to۰}\frac{(x^2)^{۲n-۱}\times۲nx\times۱}{(۱-(۱-\frac{x^2}{۲}))^m}=\lim_{x\to۰}\frac{x^{۴n-۱}\times۲n}{(\frac{x^2}{۲})^m}=\lim_{x\to۰}۲^m\times۲n=۳۲\sqrt{۲}$

$\begin{cases}۴n-۱=۲m\Rightarrow m=۲n-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲}\\ ۲^{m+۱}\times n=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow ۲^{۲n+\frac{۱}{۲}}\times n=۲^{۲n}\times\sqrt{۲}\times n=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow ۲^{۲n}\times n=۳۲\Rightarrow n=۲\end{cases}\Rightarrow ۲m+n=۲(\frac{۷}{۲})+۲=\boxed{۹}$

۸

$f(x)=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}-۱)-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)^2}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\frac{(\sqrt{x}-۱-\sqrt{x}-۱)}{(\sqrt{x}-۱)^2}=\frac{-۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)^2}\Rightarrow f'(۲)=\frac{-۱}{\sqrt{۲}(\sqrt{۲}-۱)^2}$

$\Rightarrow(f^{-۱}(۲))'=\frac{-\sqrt{۲}(۳-۲\sqrt{۲})}{۱}=\boxed{۴-۳\sqrt{۲}}$

۹

$f(x)=(x^2+۱)^3(ax+۱)\qquad\frac{f(۰)-f(-۱)}{۰-(-۱)}=\frac{۱-۸(-a+۱)}{}=۸a-۷=-۱۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x)=(x^2+۱)^3(-\frac{۱}{۲}x+۱)$

$\Rightarrow f'(x)=۳(x^2+۱)^2\times۲x(-\frac{۱}{۲}x+۱)+(-\frac{۱}{۲})(x^2+۱)^3\Rightarrow f'(۱)=۳\times۴\times۲\times\frac{۱}{۲}+(-\frac{۱}{۲})\times۸=\boxed{۸}$

۱۰

$y=\sin x.\cos۲x\qquad\frac{\sin\frac{\pi}{۲}\cos\pi-\sin\frac{\pi}{۴}.\cos\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}}=\frac{-۱-۰}{\frac{\pi}{۴}}=-\frac{۴}{\pi}$

$y=\sin^4x-\cos^4x=-\cos۲x\qquad\frac{-\cos\pi-(-\cos\frac{\pi}{۲})}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱+۰}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۴}{\pi}$

$\Rightarrow\frac{-\frac{۴}{\pi}}{\frac{۴}{\pi}}=\boxed{-۱}$