Date No ۱۸

بیشتر دقت کن اصولاً تکلیف‌های خیلی خوبی می‌نویسید

آمادگی کنکا - تکلیف ۲۳.

۱.
$g'(x) = (2(1+\tan^2 x) - \sqrt{2}\sin x)\, f'(\tan^2 x + \sqrt{2}\cos x)$

$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow \underbrace{g'(\frac{\pi}{4})}_{\sqrt{3}} = \underbrace{(2(2) - \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})}_{2} f'\underbrace{(1+1)}_{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۱٫۲۵

۲.
$f(x) = \frac{(\cos x + 2)(\cos^2 x - 2\cos x + 4)}{(\cos x + 2)(2 - \cos x)} \overset{hop}{\Rightarrow} f'(x) = \frac{-2\cos x \sin x + 2\sin x}{\sin x}$

$= -2\cos x + 2 \qquad g'(x) \overset{hop}{=} \frac{1}{2 + \sin x} \qquad f'(\frac{7\pi}{6}) = -2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2 = 2 + \sqrt{3}$

$g'(\frac{7\pi}{6}) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(\frac{7\pi}{6}) - 2g'(\frac{7\pi}{6}) = 2 + \sqrt{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} + \sqrt{3}$

۱٫۵

۳.
$x \rightarrow \frac{3}{4}^{+} \Rightarrow f(x) = (4x - 3)\sqrt{ax} \Rightarrow f'(x) = 4\sqrt{ax} + \frac{a(4x-3)}{2\sqrt{ax}}$

مشتق عامل صفرشونده راحت تره!

$x \rightarrow \frac{3}{4}^{-} \Rightarrow f(x) = (3 - 4x)\sqrt{ax} \Rightarrow f'(x) = -4\sqrt{ax} + \frac{a(3-4x)}{2\sqrt{ax}}$ ۱٫۸

طبق اطلاعات $8\sqrt{ax} + \frac{a(4x-3)}{\sqrt{ax}} = 2\sqrt{6} \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} 8\sqrt{\frac{3}{4}a} = 2\sqrt{6} \Rightarrow a = 2$

۴.
مماس: شیب برابر $y = -ax + 2 \rightarrow m = -a \qquad f'(4) = -a$

مقدار برابر $x = 4 \rightarrow y = 2 - 4a \qquad f(4) = 2 - 4a$

$\Rightarrow 2 - 4a - a = 2 - 5a = -1 \Rightarrow 5a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{5} \qquad f'(4) = -\frac{3}{5}$

۲

۵.
$y = \frac{x+5}{7} \Rightarrow m = \frac{1}{7} \qquad f'(x) = \frac{a+3}{(3x+1)^2} \Rightarrow \frac{a+3}{(3x+1)^2} = \frac{1}{7}$

۱٫۲۵

مقدارها باید برابر باشه $\rightarrow \frac{x+5}{7} = \frac{ax-1}{3x+1} \Rightarrow 3x^2 + 15x + x + 5 = 7ax - 7$

$3x^2 + (16 - 7a)x + 12 = 0$

چون معادله یک ریشه مضاعف داره $\Delta = 0 \Rightarrow (16 - 7a)^2 - 4(3)(12) = 0$

$256 + 49a^2 - 224a - 144 = 49a^2 - 224a + 112 = 0$

$7a^2 - 32a + 16 = 0 \Rightarrow a = \frac{32 \pm 24}{14} = 4,\ \frac{8}{14}$

if $a = 4$ نقطه تماس: $(2, 1)$ ✓ if $a = \frac{8}{14}$: نقطه $(\frac{4}{3}, \frac{19}{21})$ ✓ ✗

قرار بود ریشه مضاعف بده...!

۶.
$f'(x) = 3x^2 + a \xrightarrow{x=2} 12 + a$ x مماس بر محور $\Rightarrow m = 0 \rightarrow 12 + a = 0$, $a = -12$

$x = 2 \rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (2)^3 - 12(2) - b = 0 \Rightarrow b = -16$

$b - a = -16 - (-12) = -4$ ۲

۷.
$f'(x) = \underbrace{n\sin^{n-1}(x^2)}\ \underbrace{\cos(x^2)}\,(2x)$ $\star\ \sin u \sim u$ $\star\ 1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$

$\xrightarrow[x \to 0]{\text{هم ارزی}} n(x^2)^{n-1} \times 1 \times 2x = 2n x^{2n-1}$

۱,۵

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) f'(x)}{(1-\cos x)^m} \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \frac{x^{2n} \cdot 2n x^{2n-1}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^m} = n \times 2^{m+1}\, x^{4n-2m-1}$

لیم عدد ثابت، توان x صفر شه

$4n - 2m = 1$ $2^{m+1} \times n = 32\sqrt{2} = 2^{\frac{11}{2}}$ $n = 1$, $m + 1 = \frac{11}{2} \Rightarrow m = \frac{9}{2}$

$2m + n = 2\left(\frac{9}{2}\right) + 1 = 10$

ببخشید این سوال راه حل سریع تری نداره؟ سوال کنکور ۱۴۰۰ ریاضی بوده :: نه متاسفانه

۸.
$f^{-1}(2) = ? \rightarrow f(?) = 2 \rightarrow \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x} - 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow$
$f(9) = 2$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2} = f'(9) = \frac{\frac{2}{6} - \frac{4}{6}}{4} = \frac{-1}{12}$

مشتق تابع معکوس = معکوس مشتق تابع $\Rightarrow$ شیب $f^{-1}(2) = -12$ ۲

۹.
$f(-1) = 8(-a + 1)$ $f(0) = 1 \rightarrow$ آهنگ تغییر متوسط $= \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 + 8a - 8}{1}$

$8a - 7 = -11 \Rightarrow a = \frac{-1}{2} \rightarrow -2a = 1$

آهنگ تغییر لحظه‌ای $\Rightarrow f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 (2x)(ax + 1) + a(x^2 + 1)^3$
$3(4)(2)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)(8) = 12 - 4 = 8$ ۲

۱۰.
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$ آهنگ متوسط: $\frac{-1 - 0}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{-4}{\pi}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$ آهنگ متوسط: $\frac{1 - 0}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$

(-1) برابر   ۲

$$g(x) = f'(\tan^2 x + \sqrt{2}\cos x) \times \left(2\tan x(1+\tan^2 x) - \sqrt{2}\sin x\right)$$ 1

$$g'(\tfrac{\pi}{4}) = f'(1 + \sqrt{2}\times\tfrac{\sqrt{2}}{2}) \times 2\times 1 \times (1+1^2) - (\sqrt{2}\times\tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\underbrace{\cancel{g'(\tfrac{\pi}{4})}}_{\sqrt{3}} = f'(2) \times \underbrace{\cancel{[2(2)-1]}}_{3} \longrightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f - 2g(\tfrac{7\pi}{4}) = \frac{(2+\cancel{\cos x})(\cos^2 x - 2\cos x + 4)}{(2-\cos x)(2+\cancel{\cos x})} - \frac{8}{2-\cos x} = \frac{\overset{\cos x(\cancel{\cos x}-2)}{\cos^2 x \cancel{-2\cos x}}}{2-\cancel{\cos x}} = -\cos x$$ 2

$$(f-2g)' = -(\cos x)' = +\sin x \longrightarrow \sin(\tfrac{7\pi}{4}) = \boxed{-\tfrac{1}{2}}$$

$$x \to \tfrac{3}{4}^+ \rightsquigarrow f(x) = 4x - 3\sqrt{\tfrac{3a}{4}} \xrightarrow[\text{صفرشونده}]{\text{مشتق عبارت}} f'(x) = \frac{4\sqrt{3a}}{2} = 2\sqrt{3a}$$ 3

$$x \to \tfrac{3}{4}^- \rightsquigarrow f(x) = -4x + 3\sqrt{\tfrac{3a}{4}} \xrightarrow[\text{صفرشونده}]{\text{مشتق عبارت}} f'(x) = \frac{-4\sqrt{3a}}{2} = -2\sqrt{3a}$$

$$4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6} \to \sqrt{3a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \to \boxed{a = \tfrac{1}{2}}$$

$$\frac{ax-1}{3x+1} = \frac{x}{7} + \frac{5}{7} \longrightarrow 7ax - 7 = 3x^2 + x + 15x + 5$$ 5

$$3x^2 + x(16-7a) + 12 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} (16-7a)^2 - 12^2 = (16-7a-12)(16-7a+12)$$

$$\boxed{a = \tfrac{4}{7}} \qquad \boxed{a = 4}$$

$$\boxed{a=4} \longrightarrow 3x^2 - 12x + 12 \longrightarrow \boxed{x=2} \checkmark$$

$a = \frac{4}{7} \longrightarrow 3x^2 + 12x + 12 \longrightarrow x = -2$ ✗ ناحیه اول

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^n(x^2) \times 2x\sin^{n-1}(x^2) \times \cos x^2}{(2\sin^2\frac{x}{2})^m} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)^n \times n \times (x^2)^{n-1} \times 2x}{(2(\frac{x}{2})^2)^m} = \frac{(x)^{2n+2n-2+1} \times 2n}{(x)^{2m} \times \frac{1}{2^m}}$$ 7

$$= \frac{2nx^{4n-1}}{\frac{1}{2^m} \times x^{2m}} = 2^{m+1} \times n \times x^{4n-2m-1} \to 4n-2m-1=0 \to n = \frac{2m+1}{4}$$

$$\to 2^{m+1} \times \frac{2m+1}{4} = 32\sqrt{2} \longrightarrow m = \frac{7}{2},\ n = 2 \to \boxed{2m+n=9}$$