Date: Sub:

تکلیف شماره ۲۳ مشتقات

۲۰ آذر

۱_

$$g(x) = f(\tan^2 x + \sqrt{2}\cos x)$$

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \qquad f'(2) = ?$$

$$y = \tan^2 x \longrightarrow y' = 2\tan x(\tan^2 x + 1)$$

$$y = \sqrt{2}\cos x \longrightarrow y' = 0 + (-\sin x)(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sin x$$

$$g'(x) = f'(\tan^2 x + \sqrt{2}\cos x)\left(2\tan x(\tan^2 x + 1) - \sqrt{2}\sin x\right)$$

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'(2)\left(2(2) - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 3f'(2)$$

$$3f'(2) = \sqrt{3} \longrightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ جواب

۲

۲_

$$f(x) = \frac{8 + \cos^3 x}{4 - \cos^2 x} \qquad g(x) = \frac{2}{2 - \cos x}$$

$$\cos x = \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{8+\alpha^3}{4-\alpha^2} \\ g(x) = \dfrac{2}{2-\alpha} \end{array}\right\} f(x) - 2g(x) = \frac{8+\alpha^3}{4-\alpha^2} - \frac{4}{2-\alpha} = \frac{\alpha^3 - 4\alpha}{4-\alpha^2} = \frac{\alpha(\alpha-2)(\cancel{\alpha+2})}{(2-\alpha)(\cancel{2+\alpha})} = -\alpha$$

$$\left(f(x) - 2g(x)\right)' = (-\cos x)' = \sin x$$

$$f'\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2g'\left(\frac{7\pi}{6}\right) = +\sin\frac{7\pi}{6} = \frac{-1}{2}$$ جواب

۲

۳_

$$f(x) = |4x - 3|\sqrt{5x}$$

$$x > \frac{3}{4} \longrightarrow f(x) = (4x-3)\sqrt{5x}$$

$$f'(x) = 4\sqrt{5x} + \frac{5(4x-3)}{2\sqrt{5x}}$$

Date: Sub: تکمیلی باب

$x < \frac{3}{4} \longrightarrow f(x) = (3-4x)\sqrt{ax}$

$$f'(x) = -4\sqrt{ax} + \frac{a(3-4x)}{2\sqrt{ax}}$$

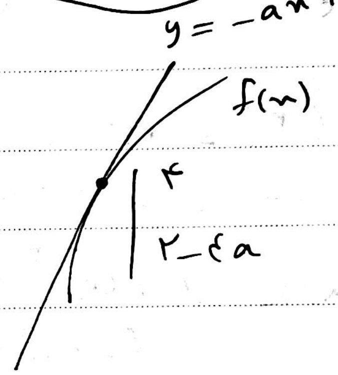
اختلاف شیب نیم‌مماس‌ها $= 2\left(4\sqrt{ax} + \frac{a(4x-3)}{2\sqrt{ax}}\right) = 2\sqrt{6}$ ۲

if $x = \frac{3}{4} \longrightarrow \cancel{8}^{4}\sqrt{\frac{3}{4}a} = \cancel{2}^{1}\sqrt{6} \longrightarrow 16 \times \frac{3}{4}a = 6$

جواب $a = \frac{1}{2}$

۴_

$y = -ax + 2$



$y + ax = 2$ در نقطه‌ای به طول ۴ بر $f(x)$ مماس است.

$f(4) + f'(4) = -1$ یا $y' = -a$

$$\left.\begin{aligned} f(4) &= 2-4a \\ f'(4) &= -a \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &2-4a-a = -1 \\ &5a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$f'(4) = -a = \frac{-3}{5} = -0.6$ جواب ۲

۵_

$7y - x = 5 \qquad y = \frac{ax-1}{3x+1}$

$y = \frac{x+5}{7}$

چون خط بر منحنی مماس است، در محل تلاقی ریشه مضاعف داریم.

$\Delta = 0 \longrightarrow \frac{ax-1}{3x+1} = \frac{x+5}{7}$

$3x^2 + 16x + 5 = 7ax - 7$

$3x^2 + (16-7a)x + 12 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow (16-7a)^2 - 4(3)(12) = 0$ ۲

$(16-7a)^2 = 144 = (12)^2$

$16 - 7a = -12$ یا $16 - 7a = 12 \longrightarrow 7a = 4$

$7a = 28 \longrightarrow \boxed{a = 4}$ ✓ $\boxed{a = \frac{4}{7}}$ ق ق غ X

Elipon

چون در ناحیه ا بر منحنی مماس است پس $a = 4$ ق ق است $(x = 2)$

۶_ در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x ها مماس پس:

$$f(x) = x^3 + ax - b$$

$$f(2) = 0 \longrightarrow 8 + 2a - b = 0 \longrightarrow \boxed{b - 2a = 8}$$

$$f'(2) = 0 \longrightarrow f'(x) = 3x^2 + a \xrightarrow{\text{if } x=2} 12 + a = 0$$

$$\boxed{b = -16} \qquad \boxed{a = -12}$$

جواب

$$b - a = -16 - (-12) = -4$$

۲

۸_

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \longrightarrow y\sqrt{x} - y = \sqrt{x} + 1$$

$$y\sqrt{x} - \sqrt{x} = y + 1 \longrightarrow \sqrt{x} = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\longrightarrow x = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 \longrightarrow y = f^{-1}(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

جواب

$$y' = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right) \xrightarrow{\text{if } x=2} 2(3)(-2) = -12$$

۲

۹_

$$f(x) = (x^2+1)^3(ax+1)$$

آهنگ تغییر متوسط $[-1, 0]$

$$= \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = -11$$

۲

$$f(-1) - \underbrace{f(0)}_{1} = 11 \longrightarrow 8 - 8a - 1 = 11$$

$$8a = -4 \longrightarrow \boxed{a = \frac{-1}{2}}$$

Date: Sub: نیکا باب

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=-2a$ $\longrightarrow$ $f'(x) = 3(x^2+1)^2(2x)(ax+1) + a(x^2+1)^3$

$\boxed{x=+1}$

$f'(1) = 3(4)(2)(\frac{1}{2}) + (\frac{-1}{2})(8)$

جواب $f'(1) = 8$

۲

$y = \sin x \cos 2x$ -۱۰

آهنگ متوسط تابع در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ $\longrightarrow$ $\dfrac{f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \dfrac{-1-0}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-4}{\pi}$ I

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = -1 \\ f(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

۲

آهنگ متوسط تغییر تابع در $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$y = \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

$\dfrac{f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \dfrac{1-0}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{+4}{\pi}$ II

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ f(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

$\dfrac{I}{II} = \dfrac{\frac{-4}{\cancel{\pi}}}{\frac{4}{\cancel{\pi}}} = -1$ جواب