مطهره کمیلی — ۱۹٫۲۵ آفرین — تکلیف ۲۳ — بحث مشتق

سوال ۱ ←

از دو طرف مشتق می‌گیریم

$g'(\frac{\pi}{4}) = \left(f(\tan^2 x + \sqrt{2}\cos x)\right)' = f'(2) \times \left(2\tan\frac{\pi}{4} \times (1+\tan^2\frac{\pi}{4}) + -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3} = f'(2) \times 3 \longrightarrow \boxed{f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

۲

سوال ۲ ←

$f'(\frac{7\pi}{6}) - 2g'(\frac{7\pi}{6}) = \left(f(\frac{7\pi}{6}) - 2g(\frac{7\pi}{6})\right)'$

$f(x) = \frac{(\cancel{2+\cos x})(4+\cos^2 x - 2\cos x)}{(\cancel{2+\cos x})(2-\cos x)}$

$\left(\frac{4+\cos^2 x - 2\cos x - 4}{2-\cos x}\right)' = \left(\frac{\cos x(\cancel{\cos x - 2})}{\cancel{2-\cos x}}\right)' = (-\cos x)' = +\sin x = -\frac{1}{2}$

۲

سوال ۳ ←

$\lim_{x\to\frac{3}{4}} \frac{|4x-3|\sqrt{ax} - 0}{x-\frac{3}{4}}$

$\frac{3}{4}^+ = +4\sqrt{ax}$

$\frac{3}{4}^- = -4\sqrt{ax}$

شیب نیم مماس‌ها در نقطه $\frac{3}{4}$

۲

اختلاف شیب نیم مماس‌ها $= 4\sqrt{ax} - (-4\sqrt{ax}) = 8\sqrt{ax} \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6} \longrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{12a}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{6}$

سوال ۴ ←

$y = -ax + 2 \xrightarrow[\text{خط}]{\text{مشتق در یک}} = -a$

$f(4) + f'(4) = -1$

$-4a + 2 - a \longrightarrow -5a + 2 = -1 \longrightarrow \boxed{a = \frac{3}{5}}$

$f'(4) = -\frac{3}{5}$

۲

Scanned with CamScanner

سوال ۶ ← وقتی تابع بر محور x ها مماس است یعنی هم تابع و هم مشتق آن در آن نقطه $= 0$ می باشد

$$x \longrightarrow 8+2a-b=0 \longrightarrow \boxed{b=-16}$$
$$\longrightarrow 3\times 4+a=0 \longrightarrow \boxed{a=-12}$$
$$\Longrightarrow b-a=-16+12=-4$$

2

سوال ۷ ←

$$f(x)=\sin^n(x^2) \quad \lim \frac{f(x)\cdot f'(x)}{(1-\cos x)^m}=32\sqrt{2} \quad \xrightarrow{x\to 0} \sin(x^2)\sim x^2$$

$$f'(x)\sim 2n\,x^{2n-1} \longrightarrow f(x)\times f'(x)\sim 2n\,x^{4n-1} \longrightarrow \text{صورت}$$

2

$$\text{مخرج}=1-\cos x\sim \frac{x^2}{2}\longrightarrow (1-\cos x)^m\sim \left(\frac{x^2}{2}\right)^m \longrightarrow \frac{x^{2m}}{2^m}\longrightarrow$$

توان x باید صفر شود

$$4n-1-2m=0$$
$$m=\frac{4n-1}{2} \quad (1)$$

$$\Longrightarrow 2^{m+1}n=32\sqrt{2}\longrightarrow 2^{m+1}n=2^{\frac{11}{2}}\to n\times 2^{\frac{4n+1}{2}}=2^{\frac{11}{2}}\to \boxed{n=2}$$

$$\boxed{2m+n=7+2=9}$$

سوال ۸ ← شیب خط مماس بر f' ← f''

1,5

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{-2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{\cancel{+2}\times\left(\frac{2}{2\sqrt{x}}\times(\sqrt{x}-1)^2-2\sqrt{x}\times 2(\sqrt{x}-1)\right)}{\cancel{4}\times x\times(\sqrt{x}-1)^4}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\times(\sqrt{2}-1)^{\cancel{2}}-2\sqrt{2}\times 2\cancel{(\sqrt{2}-1)}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\times 2\times(\sqrt{2}-1)^{\cancel{4}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)-4}{4\sqrt{2}-4}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}-4}{4\sqrt{2}-4}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}-3}{4\sqrt{2}-4}\times\frac{4\sqrt{2}+4}{4\sqrt{2}+4}=\frac{-4-12\sqrt{2}-\cancel{\frac{4}{\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}}-12}{\underbrace{16\times 2-16}_{16}}$$

$$=\frac{-16-14\sqrt{2}}{16}=\frac{-8-7\sqrt{2}}{8}$$

Scanned with CamScanner

سوال ۹ ←

$$\frac{f(0)-f(-1)}{0+1} = -11 \rightarrow 1\times1 - 8\times(-a+1) = -11 \rightarrow \frac{+8}{4}(-a+1) = \frac{+12}{4}$$

$$\boxed{f'(x) = 3(x^2+1)^2 \times 2x \times (ax+1) + \cancel{a}\ (x^2+1)^3 \quad + \frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow -2a+2=3 \longrightarrow -2a=5 \rightarrow a=-\frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{5}{\cancel{2}}\times\cancel{2} = 5 \longrightarrow f'(x) = 8$$

۲

سوال ۱۰ ←

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}$$

$$\frac{\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{\cancel{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{2} - \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}}{\cancel{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

۱/۷۵

۸

$f^{-1}(۲)=t \rightarrow f(t)=۲ \longrightarrow \sqrt{t}+۱=۲\sqrt{t}-۲ \longrightarrow \sqrt{t}=۳ \longrightarrow t=۹$

$(f^{-1})'(۲)=\dfrac{۱}{f'(۹)}$ ، $f'(x)=\dfrac{-۲}{(\sqrt{x}-۱)^۲}\times\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}$

$f'(۹)=\dfrac{-۲}{(۲)^۲}\times\dfrac{۱}{۶}=-\dfrac{۱}{۱۲} \longrightarrow (f^{-1})'(۲)=-۱۲$

۹

$\dfrac{f(۰)-f(-۱)}{۰-(-۱)}=\dfrac{۱-۸(-a+۱)}{۱}=۸a-۷=-۱۱ \rightarrow ۸a=-۴ \rightarrow \boxed{a=-\frac{۱}{۲}}$

$f'(x)=۳(x^۲+۱)^۲(۲x)(ax+۱)+a(x^۲+۱)^۳ \xrightarrow{-۲a=۱} f'(۱)=۳(۲)^۲(۲)(\frac{۱}{۲})+-\frac{۱}{۲}(۲)^۳$

$f'(۱)=۱۲-۴=۸$