۱۸

سوال ۱)

$g(x)=f(\tan^2x+\sqrt{2}\cos x) \xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x)=\left(2(1+\tan^2x)(\tan x)-\sqrt{2}\sin x\right)f'(\tan^2x+\sqrt{2}\cos x) \xrightarrow{g'(\frac{\pi}{4})=\sqrt{3},\ x=\frac{\pi}{4}}$

$g'(\frac{\pi}{4})=(2\times2\times1-1)f'(2) \rightarrow \sqrt{3}=3f'(2) \rightarrow f'(2)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲

سوال ۲)

$f(x)=\frac{8+\cos^3x}{4-\cos^2x} \rightarrow f'(x)=\frac{(-3\sin x\cos^2x)(4-\cos^2x)-(2\sin x\cos x)(8+\cos^3x)}{(4-\cos^2x)^2} \rightarrow f'(\frac{7\pi}{6})=\frac{(-3\times(\frac{-1}{2})\times\frac{3}{4})(4-\frac{3}{4})-(2\times(\frac{-1}{2})(\frac{-\sqrt{3}}{2}))(8-\frac{3\sqrt{3}}{8})}{(4-\frac{3}{4})^2}$

$=\frac{135-128\sqrt{3}}{169\times2}$

$g(x)=\frac{2}{2-\cos x} \rightarrow g'(x)=\frac{-2\sin x}{(2-\cos x)^2} \rightarrow g'(\frac{7\pi}{6})=\frac{-2(\frac{-1}{2})}{\frac{19+8\sqrt{3}}{4}}=\frac{4}{19+8\sqrt{3}}=\frac{4(19-8\sqrt{3})}{169} \longrightarrow 2g'(\frac{7\pi}{6})=\frac{152-64\sqrt{3}}{169}$

$f'(\frac{7\pi}{6})-2g'(\frac{7\pi}{6})=\frac{135-128\sqrt{3}}{169\times2}-\frac{152-64\sqrt{3}}{169}=\frac{135-128\sqrt{3}-304+128\sqrt{3}}{169\times2}=\frac{-169}{169\times2}=-\frac{1}{2}$

۲

سوال ۳)

$f(x)=|4x-3|\sqrt{ax}$ $\quad f'_+(\frac{3}{4})=4\sqrt{ax}+\frac{a}{2\sqrt{ax}}(4x-3)=4\sqrt{\frac{3a}{4}}$ $\quad f'_-(\frac{3}{4})=-4\sqrt{ax}+\frac{a}{2\sqrt{ax}}(3-4x)=-4\sqrt{\frac{3a}{4}}$

$f'_+(\frac{3}{4})-f'_-(\frac{3}{4})=4\sqrt{\frac{3a}{4}}+4\sqrt{\frac{3a}{4}}=8\sqrt{\frac{3a}{4}}=4\sqrt{3a}=2\sqrt{6} \longrightarrow \sqrt{48a}=\sqrt{24} \rightarrow a=\frac{1}{2}$

۲

سوال ۴)

$y=-ax+2 \quad f(4)+f'(4)=-1 \longrightarrow -4a+2-a=-1 \longrightarrow 5a=3 \rightarrow a=\frac{3}{5} \quad \rightarrow f'(4)=-a=-\frac{3}{5}$

۲

سوال ۵)

$y=\frac{1}{7}x+\frac{5}{7} \quad y=\frac{ax-1}{3x+1} \longrightarrow \frac{x+5}{7}=\frac{ax-1}{3x+1} \Rightarrow 3x^2+16x+5=7ax-7 \rightarrow 3x^2+x(16-7a)+12=0 \ ① \longrightarrow \Delta=0$

$\longrightarrow 256-224a+49a^2-144=0 \longrightarrow 49a^2-224a+112=0 \rightarrow (7a-28)(7a-4)=0 \rightarrow a=\frac{4}{7}\ \times,\ a=4\ \checkmark$

برای اینکه بفهمیم کدام a درست است باید نقطه‌ی تماس را پیدا کنیم و ببینیم x>0 یا x<0 است یا خیر برای یک معادله‌ی درجه ۲ با ریشه‌ی مضاعف، ریشه برابر است با $\frac{-b}{2a}$

$a=\frac{4}{7} \xrightarrow{①} 3x^2+12x+12=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow x \not> 0 \qquad a=4 \xrightarrow{①} 3x^2-12x+12=0 \rightarrow x=2\ \checkmark$

۲

سوال ۶)

$f(x)=x^3+ax-b \longrightarrow f'(x)=3x^2+a \rightarrow f'(2)=12+a=0 \rightarrow a=-12 \quad \rightarrow f(2)=8-24-b=0 \rightarrow b=-16 \quad b-a=-16+12=-4$

۲

سوال ۷)

$f(x)=\sin^n(x^2) \qquad \lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)}{(1-\cos x)^m}=32\sqrt{2} \qquad f'(x)=2nx(\cos(x^2))\sin^{n-1}(x^2)$

۰/۵

سوال ۸)

$f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x}-1} \xrightarrow{f^{-1}(x)=f(x)} f'(x)=\frac{-\cancel{2}}{(\sqrt{x}-1)^2}\times\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \rightarrow f'(2)=\frac{-1}{3-2\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-1}{3\sqrt{2}-4}=\frac{-3\sqrt{2}-4}{2}$

۱/۵

سوال ۹)

$f(x)=(x^2+1)^3(ax+1) \quad [-1,0]$ $\quad$ طول بازه $=0-(-1)=1$ $\quad f(-1)=8(-a+1)=8-8a \quad f(0)=1$

آهنگ تغییر متوسط $=\frac{f(0)-f(-1)}{\text{طول بازه}}=\frac{8a-7}{1}=-11 \rightarrow 8a=-4 \rightarrow a=-\frac{1}{2} \longrightarrow -2a=1$

$f'(x)=3(2x)(x^2+1)^2(-\frac{1}{2}x+1)+\frac{-1}{2}(x^2+1)^3 \longrightarrow x=-1$ آهنگ تغییر لحظه‌ای در $=f'(-1)=3(2)(4)(\frac{1}{2})-4=8$

۲

$f(x) = \sin x \cos 2x \quad [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ طول بازه $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ $f(\frac{\pi}{2}) = -1$ $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ آهنگ متوسط تغییر $= \frac{-1-0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{-4}{\pi}$ سوال ۱۰)

$g(x) = \sin^4 x - \cos^4 x = -\cos 2x$ طول بازه $= \frac{\pi}{4}$ $g(\frac{\pi}{2}) = 1$ $g(\frac{\pi}{4}) = 0$ آهنگ متوسط تغییر $= \frac{1-0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$

$$\left.\right\} \frac{\frac{-4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = -1$$

۲

۷

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^n(x^2) \times 2x \sin^{n-1}(x^2) \times \cos x^2}{(2\sin^2 \frac{x}{2})^m} \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \lim_{x \to 0} \frac{(x^2)^n \times n \times (x^2)^{n-1} \times 2x}{(2(\frac{x}{2})^2)^m} = \frac{(x)^{2n+2n-2+1} \times 2n}{(x)^{2m} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2n x^{4n-1}}{\frac{1}{2^m} \times x^{2m}} = 2^{m+1} \times n \times x^{4n-2m-1}$$

حد $\; 4n - 2m - 1 = 0 \rightarrow n = \frac{2m+1}{4}$

حد $\; 2^{m+1} \times \frac{2m+1}{4} = 32\sqrt{2} \longrightarrow m = \frac{7}{2} \,,\; n = 2 \rightarrow \boxed{2m + n = 9}$

۸

$$f^{-1}(2) = t \rightarrow f(t) = 2 \longrightarrow \sqrt{t} + 1 = 2\sqrt{t} - 2 \rightarrow \sqrt{t} = 3 \rightarrow t = 9$$

$$f^{-1\prime}(2) = \frac{1}{f'(9)} \quad \text{و} \quad f'(x) = \frac{-2}{(\sqrt{x}-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(9) = \frac{-2}{(2)^2} \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{12} \longrightarrow \boxed{f^{-1\prime}(2) = -12}$$