تکلیف شماره ی ۱۹ — به نام خدا

نسترن کرمی ، دوازدهم دختر B

۱۹٫۷۵ آفرین

۱

$F(x) = 2\left[\frac{2-x}{2}\right] + a\left[\frac{x+2}{3}\right]$

$x = -2$

$\left[\frac{a}{3}\right] = ?$

۲

$\lim_{x\to(-2)^+} F(x) = \lim_{x\to(-2)^-} F(x) \Rightarrow \lim_{x\to(-2)^+} \left(F(x) = 2[2^-] + a[0^+]\right)$

$= \lim_{x\to -2^+} 2 = 2$

$\lim_{x\to(-2)^-} F(x) = \lim_{x\to(-2)^-} 2[2^+] + a[0^-] = \lim_{x\to(-2)^-} 4 - a = 4 - a \Big\} \Rightarrow 4 - a = 2$

$\boxed{a = 2}$

$\left[\frac{a}{3}\right] = \left[\frac{2}{3}\right] = 0$

۲

۲

$\lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^-} [2\sin x - 1]$

$x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin x < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$2\sin x < 1 \Rightarrow 2\sin x - 1 < 0 \Rightarrow$

$[2\sin x - 1] = -1$

$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^-} [2\sin x - 1] = -1$

۳

۲

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} [8x^3 - x]$

$8x^3 - x \xrightarrow{x = -\frac{1}{2}} -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow$

چون مقدار عبارت داخل براکت عدد صحیح نشده است لذا به ازای همسایگی مقدار $(-\frac{1}{2})$ چه از تعاریف چپ (همسایگی راست) چه از همسایگی چپ براکت حاصل $(-1)$ خواهد بود

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2}^+\right] = -1$

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2}^-\right] = -1$

(شاید نیازی به دو شاخه ای کردن هم نبود)

۴

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{10x-5+\left[\frac{3}{x^2}\right]}{14x-\left[-\frac{2}{x^2}\right]} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۲

حد صورت: $\lim_{x\to(-\frac12)^-}\left(10(-\frac{1}{2})-5+11\right)=1$ | حد مخرج: $\lim_{x\to(-\frac12)^-}\left(14x-\left[\frac{-2}{x^2}\right]\right)=-8+8=0$

$x<-\frac{1}{2} \to x^2>\frac{1}{4} \to \frac{1}{x^2}<4 \to \frac{3}{x^2}<12 \Rightarrow \left[\frac{3}{x^2}\right]=11$

$x<-\frac{1}{2} \Rightarrow x^2>\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2}<4 \to \frac{2}{x^2}<8 \to \frac{-2}{x^2}>-8 \Rightarrow \left[\frac{-2}{x^2}\right]=-8$

حد مخرج صفر شوات اما چون $x<-\frac{1}{2}$ مقدار آن از صفر کمتر است $(0^-)$

---

۵

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sin^2\pi x}{[x]+\cos\pi x}\right)=\lim_{x\to1^+}\frac{\sin^2\pi x}{\cos\pi x+1}\ \overset{\frac{0}{0}\text{ مبهم}}{=\!=}\ \frac{1-\cos^2\pi x}{\cos\pi x+1}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{(1-\cos\pi x)\cancel{(1+\cos\pi x)}}{\cancel{1+\cos\pi x}}=1-\cos\pi=2$$

۲

---

۶ راه تستش هم درسته البته ولی باید با راه تشریحی حل کنید :)

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}\times\frac{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\times\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}=$$

$$\frac{\overbrace{2x+3-3x-4}^{-\cancel{(x+1)}}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}\times\frac{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\cancel{(1+x)}}=\frac{-1\left(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}\Rightarrow f(x)$$

۲

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{-1(1+1+1)}{2}=-\frac{3}{2}$$

---

۷

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}\times\frac{\text{مزدوج مخرج}}{\underset{(2x+\sqrt{3x+1})}{\text{مزدوج مخرج}}}\overset{*}{=}\frac{(2\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-1)}{(4x^2-3x-1)}\times\text{م.م}=\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(2\sqrt{x}-5)\times\text{م.م}}{\cancel{(x-1)}(4x+1)}\Rightarrow$$

$(\sqrt{x}+1)$ ۲

۱٫۷۵

$$\lim_{x\to1}\frac{\overset{-3}{(2-5)}\,4}{\cancel{5}\ 10}=\frac{-12}{\cancel{5}\ 10}=-2{,}4$$

$(*)$ $2x-7\sqrt{x}+5\Rightarrow2(\sqrt{x})^2-7\sqrt{x}+5=(2\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-1)$

۸) از آنجا که مخرج صفر می‌شود که حد صورت نیز صفر بوده است تا حالت $\left(\frac{0}{0}\right)$ شود:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+\sqrt{bx+c}}{x}=\frac{1}{4}\qquad \frac{ab}{c}=?$$

$$a+\sqrt{b(0)+c}=0$$

$$a+\sqrt{c}=0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{c}=-a}\ (1) \Rightarrow a^2=c$$

۲) حاصل lim را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^2-bx-c}{x}\times\frac{1}{a-\sqrt{bx+c}}\right)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-b\cancel{x}}{\cancel{x}}\times\frac{1}{a-\sqrt{bx+c}}=\lim_{x\to 0}\frac{-b}{a-\sqrt{bx+c}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{-b}{a-\sqrt{c}}=\frac{1}{4}\overset{a=-\sqrt{c}}{\Longrightarrow}\frac{b}{2\sqrt{c}}=\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{\sqrt{c}=2b}\ (2)$$

$$(1),(2)\Longrightarrow \frac{ab}{c}=\frac{-\sqrt{c}\times\frac{\sqrt{c}}{2}}{c}=\frac{-1}{2}$$

۹)

$$\lim_{x\to -2\pi}\frac{4+k\left[\frac{x}{\pi}\right]}{\sin x}=+\infty\qquad [-k]=?$$

۲ حد:

$$\lim_{x\to(-2\pi)^+}\frac{4+k\left[\frac{x}{\pi}\right]}{\sin x}=\frac{4-2k}{0^+}=+\infty$$

$$\Rightarrow 4-2k>0,\quad 2k<4\Rightarrow k<2\quad (\mathrm{I})$$

$$\lim_{x\to(-2\pi)^-}\frac{4+k\left[\frac{x}{\pi}\right]}{\sin x}=\frac{4-3k}{0^-}=+\infty$$

$$\Rightarrow 4-3k<0\Rightarrow 3k>4\Rightarrow k>\frac{4}{3}\quad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I})\cap(\mathrm{II}):\ \frac{4}{3}<k<2\Rightarrow -2<-k<-\frac{4}{3}\Rightarrow [-k]=-2$$

۱۰)

$$\lim_{x\to 8}\frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2b}{ax-b}\times\frac{\text{م.ص}}{\text{م.ص}}=\frac{b^2(2+\sqrt[3]{x})-4b^2}{ax-b}\times\frac{1}{\underbrace{\text{م.ص}}_{2\times 2b=4b}}=\frac{b^2}{4b}\times\frac{(\sqrt[3]{x}-2)}{ax-b}$$

(مزدوج صورت)

$$\Rightarrow 8a-b=0\Rightarrow 8a=b\qquad \Longrightarrow \lim_{x\to 8}\frac{b}{4}\left(\frac{(\sqrt[3]{x}-2)}{ax-b}\right)$$

حکم $\frac{0}{0}$

عبارت مخرج به صورت $x-8$ بوده است یعنی $a=1$، $b=8$ که در رابطه $8a=b$ نیز صدق می‌کند

داریم:

$$\lim_{x\to 8}\frac{b}{4}\,\frac{\cancel{\sqrt[3]{x}-2}}{(\cancel{\sqrt[3]{x}-2})(\underbrace{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}_{12})}\overset{b=8}{=}\lim_{x\to 8}2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

7

$$\lim \frac{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}-۵)}{۲x-\sqrt{۳x+۱}} \times \frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{۲x+\sqrt{۳x+۱}} = \frac{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}-۵)\times ۴}{۴x^{۲}-۳x-۱}$$

$$\lim \frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(۲\sqrt{x}-۵)\times ۴}{\underset{\sqrt{x}+۱}{\cancel{(x-۱)}}(۴x+۱)} = \lim \frac{[۲(۱)-۵]\times ۴}{(۴(۱)+۱)\times ۲} = -۱٫۲$$