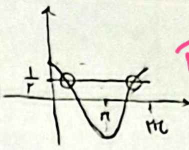
مبینا جعفرپور — تکلیف ۱۷ — دوازدهم دختر B — ۲۰ آفرین

۱

$8\cos x-\tan^2x=1\Rightarrow 8\cos x=1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}\Rightarrow 8\cos^3x=1\Rightarrow \cos^3x=\frac{1}{8}\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

$\tan x$: تعریف شده $\Rightarrow \cos x\neq 0$



۲ جواب دارد ✓ ۲

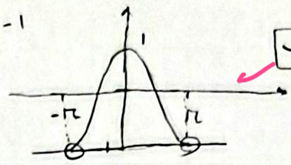
۲

$5\sin^2x+2\cos 3x=-2\Rightarrow 5(1-\cos^2x)+2(4\cos^3x-3\cos x)=-2\Rightarrow 8\cos^3x-5\cos^2x-6\cos x+7=0$

ضرایب جملات فرد با زوج برابر است پس یکی از ریشه‌ها (۱-) است

$\Rightarrow(\cos x+1)(8\cos^2x-13\cos x+7)=0\Rightarrow \cos x=-1$

$(13)^2-4(8)(7)<0\Rightarrow$ ریشه ندارد



۲ جواب ✓ ۲

۳

$2\sin x\cos 2x+\sin x=1=\sin x(2\cos 2x+1)=1\Rightarrow \sin x(2(1-2\sin^2x)+1)=-4\sin^3x+3\sin x=1\Rightarrow 4\sin^3x-3\sin x+1=0$

$-4\sin^2x+3$

$\Rightarrow(\sin x+1)(4\sin^2x-4\sin x+1)=0$, $(4\sin^2x-4\sin x+1)=(2\sin x-1)^2$

$\sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$

$\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$, $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

ضرایب جملات فرد با زوج برابر پس یکی از ریشه‌ها (۱-) است

K	x		
0	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=\boxed{\frac{5\pi}{2}}$ ✓ ۲

۴

$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+2x)}+\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+4x)}=\frac{1}{\cos 2x}+\frac{1}{-\sin 4x}=-\frac{\sin 4x+\cos 2x}{\cos 2x\cdot\sin 4x}=-\frac{\cos 2x(2\sin(2x)+1)}{\cos 2x\cdot\sin 4x}=-\frac{2\sin(2x)+1}{\sin 4x}=0$ $\quad \sin 4x\neq 0,\ \cos 2x\neq 0$

$\Rightarrow 2\sin 2x+1=0\Rightarrow \sin 2x=\frac{-1}{2}\Rightarrow$

$2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{11\pi}{12}$

$2x=2k\pi-\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{5\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{7\pi}{12}$

$\Rightarrow \frac{11\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}=\alpha$

$\Rightarrow \tan 2\alpha=\tan\frac{2\pi}{3}=\boxed{-\sqrt{3}}$ ۲

۵

$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\Rightarrow \cos x-\sin x=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ *

$m(\cos x-\sin x)-3\sqrt{6}\sin(2x)=\sqrt{6}\Rightarrow 3\sqrt{6}\sin 2x=\sqrt{6}(\frac{m}{3}-1)\Rightarrow \sin 2x=\frac{m-3}{9}$

$\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2=\cos^2x+\sin^2x-2\cos x\cdot\sin x=1-\sin 2x=\frac{2}{3}\Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{3}$ $\quad (*\ (\frac{\sqrt{6}}{3})^2)$

$\Rightarrow \frac{m-3}{9}=\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{m=6}$ ✓ ۲

۶

$\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{3})=1\Rightarrow \sin((x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{2})\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos^2(x-\frac{\pi}{3})=1\Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{3})=\pm 1$

$\Rightarrow x-\frac{\pi}{3}=k\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}$

K	0	1
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

۲ جواب ✓ ۲

۷

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{12}$

$x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{12}$

K	0	1
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{23\pi}{12}$
	$\frac{5\pi}{12}$	–

$-\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+\frac{23\pi}{12}=\boxed{\frac{9\pi}{4}}$ ✓ ۲

۸

$4\sin x\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1\Rightarrow 4\sin x\cos x=-1\Rightarrow 2\sin 2x=-1\Rightarrow \sin 2x=\frac{-1}{2}\Rightarrow$ $\quad (\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=-\cos x)$

$2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12}$

$2x=2k\pi-\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{5\pi}{12}$

K	1	2
x	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{23\pi}{12}$
	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{12}$

$\frac{11\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}+\frac{23\pi}{12}+\frac{19\pi}{12}=\boxed{5\pi}$ ✓ ۲

۹

$(1+\cos(2\alpha))(1+\cos(4\alpha))(1+\cos(8\alpha))=\frac{1}{8}=(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)\xrightarrow[\times\sin^2\alpha\ (\sin\alpha\neq 0)*]{}(2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)$

$=(\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\times 2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{4}\sin^2 4\alpha\cdot 2\cos^2 4\alpha=\frac{1}{8}\sin^2 8\alpha=\frac{1}{8}\sin^2\alpha\Rightarrow \sin^2 8\alpha=\sin^2\alpha\Rightarrow \sin 8\alpha=\pm\sin\alpha$

$\sin 8\alpha=\sin\alpha\Rightarrow$ $8\alpha=2k\pi+\alpha\Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{7}$; $8\alpha=2k\pi+\pi-\alpha\Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{9}+\frac{\pi}{9}$

$\sin 8\alpha=-\sin\alpha=\sin(-\alpha)\Rightarrow$ $8\alpha=2k\pi-\alpha\Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{9}$; $8\alpha=2k\pi+\pi+\alpha\Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{7}+\frac{\pi}{7}$

$\Rightarrow A=\{\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{7},\dots,\frac{8\pi}{9}\}$ max جواب ✓ ۲

*توجه داریم که $\alpha=k\pi$ در جواب‌ها نیستند چون از ضرب $\sin^2\alpha$ به وجود آمده اند

۱۵ $\tan(3x)\tan(x)=1 \Rightarrow \tan(3x)=\frac{1}{\tan(x)} \Rightarrow \tan 3x = \cot x = \tan(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

k	۴	۵	۶	۷
x	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{8}$

$\frac{9\pi}{8} + \frac{11\pi}{8} + \frac{13\pi}{8} + \frac{15\pi}{8} = \boxed{4\pi}$

۲

باید تعریف شده و مخالف ۰ باشند که برقرار است $\tan 3x$ ، $\tan x$