سارا عبدالهی

۱۹ آذر

۱) جواب کلی معادلات؟

الف) $\cos 2x = 3\sin x - 1$ $1-2\sin^2 x = 3\sin x - 1$ $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4(2)(-2) = 25$ $\sin x = \frac{-3 \pm 5}{4} = \frac{1}{2}$ یا -2 غ ق ق $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

۲

ب) $\cos 2x + \cos x - 2 = 0$

$2\cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$ $\Delta = 25$

$\cos x = \frac{-1 \pm 5}{4} = \frac{-3}{2}$ غ ق ق یا 1 $x = 2k\pi$

۲)

الف) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 4x$ $(\sin^2 x - \cos^2 x)(\cancel{\sin^2 x + \cos^2 x}) = \sin 4x$

$-\cos 2x = 2\sin 2x \cos 2x$

$\cos 2x = 0$

$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$

$\sin 2x = -\frac{1}{2}$ $2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \to \boxed{x = k\pi + \frac{7\pi}{12}}$

$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \to \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{12}}$

۲

ب) $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ $\sin^2 x + \cos^2 x$ $\cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$

$\cos^2 x - \sin^2 x = -\sin 2x \to \cos 2x = -\sin 2x$

$\cancel{2x} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \cancel{2x}$

$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \to 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \to x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

۳)

الف) $\underset{\sin x}{\overset{\cos x}{\cot x}}(2\cos x + 1) = \frac{1}{\sin x}$ $\sin x \neq 0$

$\cos x = 0$ $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۲

ب) $2\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 2 \xrightarrow{\div \sin^2 x} 2 - \cot x + \cot^2 x = 2(1 + \cot^2 x)$

$\cancel{2} - \cot x + \cot^2 x = \cancel{2} + 2\cot^2 x \Rightarrow \cot^2 x + \cot x = 0$

$\cot x = 0$ $k\pi + \frac{\pi}{2} = x$

$\cot x = -1$ $k\pi - \frac{\pi}{4} = x$

۴) الف) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\overset{-x+\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{\pi}{4}+x-x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\frac{1}{4}$ ✓ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}$

$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ✓

۲

ب) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{9}\right)=\overset{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}{-\sin 2x}$

$2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\cancel{2x}$

$2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x \rightarrow 4x=2k\pi-\frac{7\pi}{18} \rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{7\pi}{72}$ ✓

۵) مجموع جواب معادلات مثلثاتی : $\frac{\sin 4x+\sin 2x}{\sin 2x}-\sin^2 x=\cos^2 x$

$\frac{\sin 4x+\sin 2x}{\sin 2x}=\underbrace{\cancel{\sin^2 x+\cos^2 x}}_{1}$

$\sin 2x \neq 0$

$\sin 2x=0$

$2x=k\pi \qquad x=\frac{k\pi}{2}$ ۲

$\cancel{\sin 2x}=\sin 4x+\cancel{\sin 2x}$

$\sin 4x=0$

$4x=k\pi \qquad x=\frac{k\pi}{4}$

$x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}$ ✓

۶) شرط مطلق تفاضل جواب های $\frac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}+\cot\frac{x}{2}$ درباره $\left[-\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ ؟

$\cancel{\sin^2\frac{x}{2}}=1+\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}$

$1-\cos^2\frac{x}{2}$

۱,۵

$2\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}=0 \rightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+1\right)=0$

$\cos\frac{x}{2}=0 \qquad \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $\qquad \left|\frac{3\pi}{2}-(-\pi)\right|=\frac{5\pi}{2}$ ✓

$\cos\frac{x}{2}=-1 \qquad \frac{x}{2}=2k\pi+\pi$

$x=4k\pi+2\pi$

۷) تعداد جواب های $\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} - \sin^2 x \cos 3x = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ بیابید.

$$\cancel{1} - \sin^2 x - \sin^2 x \cos 3x = \cancel{1}$$

$$\sin^2 x (1 + \cos 3x) = 0$$

$\rightarrow \sin^2 x = 0 \quad x = k\pi \quad x = 0, \pi, 2\pi$

$\rightarrow 1 + \cos 3x = 0 \quad 3x = 2k\pi + \pi$

$\cos 3x = -1 \quad x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

۲

k	0	1	2	$\cancel{3}$
x	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$

۵ جواب

۸) جواب کلی معادله مثلثاتی

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x$$

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x$$

$$4x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

۲

۹) معادله مثلثاتی $\sqrt{\underbrace{1 + \sin 2x}_{\text{همواره } +}} = \sqrt{2}\cos 2x$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

$\cos 2x \geq 0$

۱,۵

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 1 + \sin 2x = 2\cos^2 2x$$

$$\sin 2x = 2\cos^2 2x - 1$$

$$\sin 2x = \cos 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 4x$$

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x$$

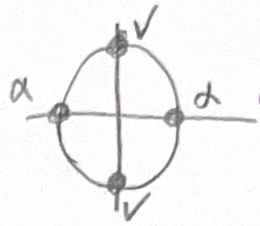
$$4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

تعداد جواب ها؟

۵) جواب های معادلات مثلثاتی زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست آورید.

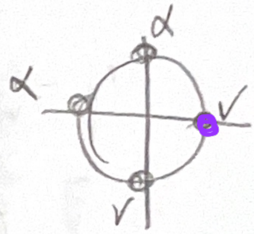
الف) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$



۱/۷۵

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ✓

ب) $\sin^3 x - \cos^3 x = -1$



2π یا 0

ارفاق

$0, \frac{3\pi}{2}$

سوال ۹

$\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{2}\cos 2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1+\sin 2x = 2\cos^2 2x$

$1+\sin 2x = 2 - 2\sin^2 2x \to 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$ → $\sin 2x = -1$ یا $\sin 2x = +\frac{1}{2}$

$\sin 2x = -1 \to 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[k=1]{0\le x\le \pi} x = \frac{3\pi}{4}$ ✓

$\sin 2x = \frac{1}{2} \to 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ یا $2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow[k=0]{0\le x\le \pi} x = \frac{\pi}{12}$ ✓ یا $\frac{5\pi}{12}$ X

چون عبارت به توان ۲ رسیده است جواب زائد تولید می‌کند

به ازای $x = \frac{5\pi}{12}$ $\cos 2x$ منفی می‌شود که چون جواب رادیکال است غ‌ق‌ق است

* معادله ۲ جواب دارد

سوال ۴

$$\frac{\sin\frac{x}{۲}}{1+\cos\frac{x}{۲}} = \boxed{\tan\frac{x}{۴}}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{۲}} + \cot\frac{x}{۲} = \frac{1+\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}} = \frac{1}{\tan\frac{x}{۴}} = \boxed{\cot\frac{x}{۴}}$$

$$\tan\frac{x}{۴} = \cot\frac{x}{۴} \longrightarrow \tan\frac{x}{۴} = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۴}\right)$$

$$\frac{x}{۴} = k\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۴} \rightarrow \frac{x}{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۲} \longrightarrow x = ۲k\pi + \pi$$

جواب‌ها $k = 0 \rightarrow x = \pi$

$k = -1 \rightarrow x = -\pi \longrightarrow$ اختلاف $= |\pi - (-\pi)| = ۲\pi$