تکلیف شماره ۱۶

مثلثات

۱-

الف) $\cos 2x = 3\sin x - 1$

$\cos^2 x - \sin^2 x = 3\sin x - 1 \longrightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 3\sin x - 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4(-2)(2) = 25$

$\sin x = \frac{-3 \pm 5}{4}$ $\begin{cases} -2 \ \times \text{ غ ق ق} \\ \frac{1}{2} \ \checkmark \text{ ق ق} \end{cases}$

$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

جواب

ب) $\cos 2x + \cos x - 2 = 0 \longrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x - 2 = 0$

$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x - 2 = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-3)(2) = 25$

$\cos x = \frac{-1 \pm 5}{4}$ $\begin{cases} \frac{-3}{2} \ \times \text{ غ ق ق} \\ 1 \ \checkmark \text{ ق ق} \end{cases}$

$\cos x = 1 \longrightarrow \boxed{x = 2k\pi}$

جواب

۲-

الف) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 4x$

$(\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = \sin 4x \longrightarrow -\cos 2x = 2\sin 2x \cos 2x$

$2\sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0$

$\cos 2x\,(2\sin 2x + 1) = 0$

$\rightarrow \cos 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$ جواب

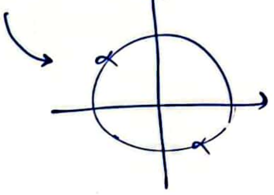
$\rightarrow 2\sin 2x + 1 = 0 \rightarrow \sin 2x = \frac{-1}{2} \longrightarrow 2x = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases} \longrightarrow \boxed{x = \begin{cases} k\pi - \frac{\pi}{12} \\ k\pi - \frac{5\pi}{12} \end{cases}}$ جواب

ب) $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$

$\underbrace{2\cos^2 x - 1}_{\cos^2 x + \cos^2 x - 1} + \underbrace{2\sin x \cos x}_{\sin 2x} = 0 \longrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

$\downarrow$

$\underbrace{\cos^2 x - 1}_{-\sin^2 x} + \cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$



$\boxed{x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}}$

نیکا صابت

۳-

الف) $\cot x(۲\cos x+۱)=\frac{۱}{\sin x}$

$\frac{\cos x}{\sin x}(۲\cos x+۱)-\frac{۱}{\sin x}=۰ \longrightarrow \frac{۲\cos^۲ x}{\sin x}+\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{۱}{\sin x}=۰$

$\longrightarrow \frac{۲\cos^۲ x+\cos x-۱}{\sin x}=۰ \longrightarrow ۲\cos^۲ x+\cos x-۱=۰$

$\cos x=\frac{-۱\pm ۳}{۴}$ → -۱ × غ ق ق → طبق دامنه $\sin x\neq ۰$ است پس $\cos x=-۱$ ق ق نیست چون در این صورت $\sin x$ صفر خواهد بود.

↳ $\frac{۱}{۲}$ ✓ ق ق

$\cos x=\frac{۱}{۲} \longrightarrow \boxed{x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}}$ جواب

ب) $۲\sin^۲ x-\sin x\cos x+\cos^۲ x=۲$

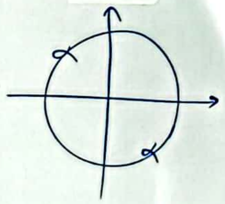
$۲\sin^۲ x-۲-\sin x\cos x+\cos^۲ x=۰$

$۲(\underbrace{\sin^۲ x-۱}_{-\cos^۲ x})+\cos^۲ x-\sin x\cos x=۰ \longrightarrow -\cos^۲ x-\sin x\cos x=۰$

$\cos x(\cos x+\sin x)=۰$

$\cos x=۰ \longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{۲}}$ جواب

$\sin x+\cos x=۰ \longrightarrow \boxed{x=k\pi-\frac{\pi}{۴}}$ جواب



۴-

الف) $\cos(\frac{\pi}{۴}+x)\cos(\frac{-\pi}{۴}+x)=\frac{۱}{۴}$

$\cos(\frac{-\pi}{۴}+x)=\cos(\frac{-\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}+x)=\sin(\frac{\pi}{۴}+x)$

$\cos(\frac{\pi}{۴}+x)\sin(\frac{\pi}{۴}+x)=\frac{۱}{۴} \longrightarrow \frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}+۲x)=\frac{۱}{۴} \longrightarrow \cos ۲x=\frac{۱}{۲}$

$۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

$\boxed{x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}}$

جواب

نکات بیست

ب) $\cos(۲x - \frac{\pi}{۹}) = -\sin ۲x$ $\qquad -\sin ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۲x)$

۴-

$\cos(۲x - \frac{\pi}{۹}) = \cos(۲x + \frac{\pi}{۲})$

$۲x - \frac{\pi}{۹} = ۲k\pi \pm (۲x + \frac{\pi}{۲}) \longrightarrow \cancel{۲x} - \frac{\pi}{۹} = ۲k\pi + \cancel{۲x} + \frac{\pi}{۲} \longrightarrow$ جواب ندارد

$\hookrightarrow ۲x - \frac{\pi}{۹} = ۲k\pi - ۲x - \frac{\pi}{۲}$

$۴x = ۲k\pi - \frac{۷\pi}{۱۸} \longrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{۷\pi}{۷۲}}$

جواب

۵-

$\frac{\sin ۴x + \sin ۲x}{\sin ۲x} - \sin^۲ x = \cos^۲ x$

$\frac{\sin ۴x}{\sin ۲x} + \underbrace{\frac{\sin ۲x}{\sin ۲x}}_{۱} = \underbrace{\cos^۲ x + \sin^۲ x}_{۱} \longrightarrow \frac{\sin ۴x}{\sin ۲x} = ۰ \qquad \sin ۲x \neq ۰$

$\sin ۴x = ۰ \longrightarrow ۴x = k\pi$

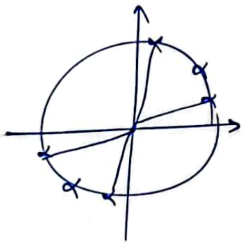
$\boxed{x = \frac{k\pi}{۴}}$ جواب

۶-

$\frac{\sin \frac{x}{۲}}{۱ + \cos \frac{x}{۲}} = \frac{۱}{\sin \frac{x}{۲}} + \cot \frac{x}{۲} \longrightarrow \frac{۱}{\sin \frac{x}{۲}} + \cot \frac{x}{۲} = \frac{۱ + \cos \frac{x}{۲}}{\sin \frac{x}{۲}}$

$\frac{\sin \frac{x}{۲}}{۱ + \cos \frac{x}{۲}} = \tan \frac{x}{۴} \qquad \frac{۱ + \cos \frac{x}{۲}}{\sin \frac{x}{۲}} = \frac{۱}{\tan \frac{x}{۴}} = \cot \frac{x}{۴}$

$\longrightarrow \tan \frac{x}{۴} = \cot \frac{x}{۴} \longrightarrow$



$\frac{x}{۴} = k\pi + \frac{\pi}{۴}$

$\boxed{x = ۴k\pi + ۲\pi}$

قدرمطلق تفاضل $\longrightarrow |-۲\pi - (-\pi)| = \boxed{\pi}$ جواب

جواب ها در بازه $[-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ به ازای $k = -۱ \longrightarrow x = -\pi, -۲\pi$

$\frac{x}{۴} = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

$\boxed{x = ۲k\pi + \pi}$

بقیه باب =

۷ -

$\cos^{۲}x-\sin^{۲}x\cos ۳x=۱$

$-\sin^{۲}x\cos ۳x=۱-\cos^{۲}x \longrightarrow -\sin^{۲}x\cos ۳x=\sin^{۲}x$

$\sin^{۲}x+\sin^{۲}x\cos ۳x=۰ \longrightarrow \sin^{۲}x(۱+\cos ۳x)=۰$

$\sin^{۲}x=۰ \longrightarrow \boxed{x=k\pi}$

$\cos ۳x+۱=۰ \longrightarrow \cos ۳x=-۱ \longrightarrow ۳x=۲k\pi+\pi \longrightarrow \boxed{x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}}$

تعداد جواب در بازه $[۰,۲\pi]$ $\longrightarrow$ جواب ها $=\{۰,\pi,۲\pi,\frac{\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}\} \longrightarrow$ ۵ جواب دارد.

---

۹ -

$\sqrt{۱+\sin ۲x}=\sqrt{۲}\cos ۲x$

$۱+\sin ۲x=۲\cos^{۲}۲x$

$\sin ۲x=۲\cos^{۲}۲x-۱ \longrightarrow \sin ۲x=\underbrace{\cos^{۲}۲x-۱}_{-\sin^{۲}۲x}-\cos^{۲}۲x$

$\sin ۲x=-(\underbrace{\sin^{۲}۲x+\cancel{\cos^{۲}}۲x}_{۱}) \longrightarrow \sin ۲x=-۱$

$۲x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲} \longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{۳\pi}{۴}}$

جواب های معادله در بازه $[۰,\pi]$ $=\boxed{\frac{۳\pi}{۴}}$ جواب

---

۱۰ -

الف) $\sin^{۴}x-\cos^{۴}x=۱ \longrightarrow \underbrace{(\sin^{۲}x-\cos^{۲}x)}_{-\cos ۲x}\underbrace{(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)}_{۱}=۱$

$\cos ۲x=-۱$

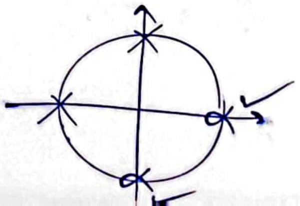
$۲x=۲k\pi+\pi \longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{۲}}$ $\longrightarrow$ جواب ها در بازه $[۰,۲\pi]$ $=\boxed{\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}}$ جواب

ب) $\sin^{۳}x+\cos^{۳}x=-۱$

نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم.

$x=\frac{۳\pi}{۲} \longrightarrow \boxed{x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}}$

جوابها $=\boxed{\pi,۲\pi,\frac{۳\pi}{۲}}$



$x=۰ \longrightarrow \boxed{x=۲k\pi}$