تکلیف شماره ۱۶ ثنا ثابت

۱۸۱۷۵

-۱

الف) $\cos ۲x = ۳\sin x - ۱$

$\cos^۲ x - \sin^۲ x = ۳\sin x - ۱ \longrightarrow ۱ - \sin^۲ x - \sin^۲ x = ۳\sin x - ۱$

$\cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x$

$۲\sin^۲ x + ۳\sin x - ۲ = ۰$

$\Delta = ۹ - ۴(-۲)(۲) = ۲۵$

$\sin x = \frac{-۳ \pm ۵}{۴}$ → -۲ × غ ق ق ، $\frac{۱}{۲}$ ✓ ق ق

$\sin x = \frac{۱}{۲} \longrightarrow x = \begin{cases} ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$

جواب

۲

ب) $\cos ۲x + \cos x - ۲ = ۰ \longrightarrow \cos^۲ x - \sin^۲ x + \cos x - ۲ = ۰$

$\cos^۲ x - (۱ - \cos^۲ x) + \cos x - ۲ = ۰$

$۲\cos^۲ x + \cos x - ۳ = ۰$

$\Delta = ۱ - ۴(-۳)(۲) = ۲۵$

$\cos x = \frac{-۱ \pm ۵}{۴}$ → $\frac{-۳}{۲}$ × غ ق ق ، ۱ ✓ ق ق

$\cos x = ۱ \longrightarrow x = ۲k\pi$

جواب

-۲

الف) $\sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin ۴x$

$(\sin^۲ x - \cos^۲ x)\underbrace{(\sin^۲ x + \cos^۲ x)}_{۱} = \sin ۴x \longrightarrow -\cos ۲x = ۲\sin ۲x \cos ۲x$

$۲\sin ۲x \cos ۲x + \cos ۲x = ۰$

$\cos ۲x\,(۲\sin ۲x + ۱) = ۰$

۲

$\longrightarrow \cos ۲x = ۰ \longrightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ جواب

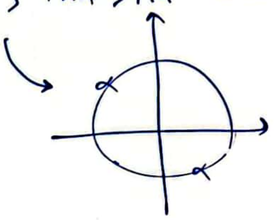
$\longrightarrow ۲\sin ۲x + ۱ = ۰ \longrightarrow \sin ۲x = \frac{-۱}{۲} \longrightarrow ۲x = \begin{cases} ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ ۲k\pi - \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \longrightarrow x = \begin{cases} k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \\ k\pi - \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$ جواب

ب) $۲\cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = ۱$

$\underbrace{۲\cos^۲ x - ۱}_{\cos^۲ x + \cos^۲ x - ۱} + \underbrace{۲\sin x \cos x}_{\sin ۲x} = ۰ \longrightarrow \cos ۲x + \sin ۲x = ۰ \longrightarrow ۲x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$

$\downarrow$

$\underbrace{\cos^۲ x - ۱}_{-\sin^۲ x} + \cos^۲ x = \cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$



$x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$

نیکا ثابت

۳-

الف) $\cot x(2\cos x + 1) = \frac{1}{\sin x}$

۲

$$\frac{\cos x}{\sin x}(2\cos x+1) - \frac{1}{\sin x} = 0 \longrightarrow \frac{2\cos^2 x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{\sin x} = 0 \longrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} -1 \times \text{غ ق ق} \longrightarrow \\ \frac{1}{2} \checkmark \text{ ق ق} \end{cases}$$

طبق دامنه $\sin x \neq 0$ است پس $\cos x = -1$ ق ق نیست چون در این صورت $\sin x$ صفر خواهد بود.

$$\cos x = \frac{1}{2} \longrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$ جواب

ب) $2\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 2$

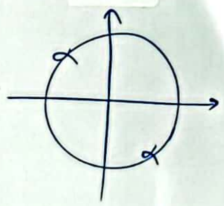
$$2\sin^2 x - 2 - \sin x\cos x + \cos^2 x = 0$$

$$2(\underbrace{\sin^2 x - 1}_{-\cos^2 x}) + \cos^2 x - \sin x \cos x = 0 \longrightarrow -\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\cos x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$ جواب

$$\sin x + \cos x = 0 \longrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$ جواب



۴-

الف) $\cos(\frac{\pi}{4} + x)\cos(\frac{-\pi}{4} + x) = \frac{1}{4}$

۲

$$\cos(\frac{-\pi}{4} + x) = \cos(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + x) = \sin(\frac{\pi}{4} + x)$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} + x)\sin(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} + 2x) = \frac{1}{4} \longrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

جواب

نکات بیست

ب) $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = -\sin 2x$ $\qquad$ $-\sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$

-۴

$\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$

$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi \pm (2x + \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \cancel{2x} - \frac{\pi}{9} = 2k\pi + \cancel{2x} + \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ جواب ندارد

$\hookrightarrow 2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi - 2x - \frac{\pi}{2}$

$4x = 2k\pi - \frac{7\pi}{18} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{72}$

جواب

-۵

$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\sin 2x} - \sin^2 x = \cos^2 x$

۱/۵

$\frac{\sin 4x}{\sin 2x} + \underbrace{\frac{\sin 2x}{\sin 2x}}_{1} = \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} \longrightarrow \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = 0 \qquad \sin 2x \neq 0$

$\sin 4x = 0 \longrightarrow 4x = k\pi$

جواب $x = \frac{k\pi}{4}$

به ازای برخی مقادیر k مخرج صفر می‌شود!

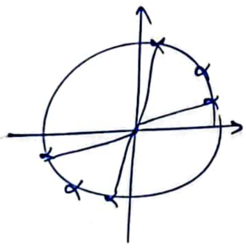
-۶

$\frac{\sin \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} + \cot \frac{x}{2} \rightsquigarrow \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} + \cot \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$

۱/۷۵

$\frac{\sin \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{4} \qquad \frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{x}{4}} = \cot \frac{x}{4}$

$\longrightarrow \tan \frac{x}{4} = \cot \frac{x}{4} \longrightarrow$



$\frac{x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4}$

$x = 4k\pi + 2\pi$

قدر مطلق تفاضل $\rightsquigarrow |\cancel{3\pi}\,\pi - (-\pi)| = 2\pi$ جواب

$\frac{x}{4} = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

جواب ها در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ به ازای $\longrightarrow x = -\pi, -2\pi$

$k = -1 \longrightarrow x = -\pi$

$x = 2k\pi + \pi$

$k = 0 \longrightarrow x = \pi$

ادامه جواب

۷ـ $\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1$

$-\sin^2 x \cos 3x = 1 - \cos^2 x \longrightarrow -\sin^2 x \cos 3x = \sin^2 x$

$\sin^2 x + \sin^2 x \cos 3x = 0 \longrightarrow \sin^2 x (1 + \cos 3x) = 0$

۲

$\sin^2 x = 0 \longrightarrow x = k\pi$

$\cos 3x + 1 = 0 \longrightarrow \cos 3x = -1 \longrightarrow 3x = 2k\pi + \pi \longrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

تعداد جواب در بازه $[0, 2\pi]$ $\longrightarrow$ جواب ها $= \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ $\longrightarrow$ ۵ جواب دارد.

۹ـ $\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{2} \cos 2x$

$1 + \sin 2x = 2\cos^2 2x$

۱٫۵

$\sin 2x = 2\cos^2 2x - 1 \longrightarrow \sin 2x = \underbrace{\cos^2 2x - 1}_{-\sin^2 2x} - \cos^2 2x$

$\sin 2x = -(\underbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}_{1}) \longrightarrow \sin 2x = -1$

$2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \longrightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$

جواب های معادله در بازه $[0, \pi]$ $= \frac{3\pi}{4}$ جواب

۱۰ـ الف) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 \longrightarrow (\underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x})(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}) = 1$

۲

$\cos 2x = -1$

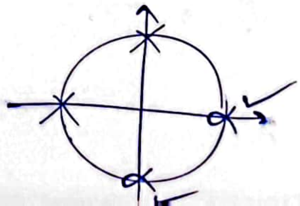
$2x = 2k\pi + \pi \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ جواب ها در بازه $[0, 2\pi]$ $= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ جواب

ب) $\sin^3 x + \cos^3 x = -1$

نقاط ویژه را بررسی می‌کنیم.

$x = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

جوابها $= 0, 2\pi, \frac{3\pi}{2}$



$x = 0 \longrightarrow x = 2k\pi$

سوال ۵

$$\frac{2\sin 2x\cos 2x+\sin 2x}{\sin 2x}=\overset{1}{\cancel{\sin^2 x+\cos^2 x}}$$

$$\frac{\cancel{\sin 2x}(2\cos 2x+1)}{\cancel{\sin 2x}}=1 \xrightarrow{\sin 2x\neq 0} 2\cos 2x+1=1 \longrightarrow \cos 2x=0$$

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{4}}$$

سوال ۶

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{4}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}+\cot\frac{x}{2}=\frac{1+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{x}{4}}=\cot\frac{x}{4}$$

$$\tan\frac{x}{4}=\cot\frac{x}{4} \longrightarrow \tan\frac{x}{4}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$$

$$\frac{x}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4} \longrightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2} \longrightarrow x=2k\pi+\pi$$

جواب‌ها

$K=0 \rightarrow x=\pi$

$K=-1 \rightarrow x=-\pi$ → اختلاف $=|\pi-(-\pi)|=2\pi$

سوال ۹

$$\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{2}\cos 2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1+\sin 2x = 2\cos^2 2x$$

$$1+\sin 2x = 2 - 2\sin^2 2x \rightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0 \rightarrow \sin 2x = -1$$

یا $\sin 2x = +\frac{1}{2}$

$$\sin 2x = -1 \rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[k=1]{0\le x\le \pi} x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \;\text{ یا }\; 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow[k=0]{0\le x\le \pi} x = \frac{\pi}{12} \;\text{ یا }\; \frac{5\pi}{12}$$

چون عبارت به توان ۲ رسیده است جواب زائد تولید می‌کند

به ازای $x = \frac{5\pi}{12}$ ، $\cos 2x$ منفی می‌شود، چون جواب رادیکال است غ ق ق است

★ معادله ۲ جواب دارد