عسل خبازیان   تکلیف ۱۶   دوازدهم دختر B

تمامی kهای نوشته شده در سوالات (هر دانا) $k\in\mathbb{Z}$

۱-

الف) $\cos 2x = 3\sin x - 1 \Rightarrow 0 = 2\sin^2 x + 3\sin x - 2$

$\cos 2x \to 1 - 2\sin^2 x$

$\sin x = -2$ و $\frac{1}{2}$ ؛ غ ق ق — ضرب ریشه ها -1 ، جمع ریشه ها $-\frac{3}{2}$

چون $\sin x$ در بازه $[1,-1]$ می تواند باشد

۲

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \frac{\pi}{6}}_{\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$ = ساده تر و کوتاه تر نوشتنی

ب) $\cos 2x + \cos x - 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

$\cos 2x \to 2\cos^2 x - 1$

جمع ضرایب $= 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{2}$ و 1 ؛ غ ق ق

چون $\sin x$ در بازه $[1,-1]$ می تواند باشد

$\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \cos 0 \Rightarrow \{x = 2k\pi \pm 0 \Rightarrow x = 2k\pi$

۲-

الف) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 4x$ $-(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin 4x$

$-(\cos^2 x - \sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1}$

$(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$ دانسته نوشتم

$-\cos 2x = 2\sin 2x\cos 2x \xrightarrow{\text{if } \cos 2x \neq 0} -\frac{1}{2} = \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \sin\frac{7\pi}{6}$ I

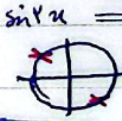
$\text{if } \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \cos 0 \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm 0$

$x = k\pi$ الف

I $\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases}$ هم پوشانی ندارند پس ۲ جواب کلی داره

۲

ب) $2\cos^2 x + \underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x} = 1$ $\underbrace{2\cos^2 - 1}_{\cos 2x} + \sin 2x = 0$ $\cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow \tan 2x = -1$



یعنی رو دایره بوده

پس از رو شکل بوده $\boxed{k\pi - \frac{\pi}{4}}$

۳- (۱،۲۵)

پس شرط یادت نره بگیری

الف) $\underbrace{\cot x}_{\frac{\cos x}{\sin x}}(2\cos x + 1) = \frac{1}{\sin x}$ — چون مخرج است ان صفر نمیشه $\sin x \neq 0$ — $\Rightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

I $\cos x = \frac{1}{2}$ II $\cos x = -1$ $\Leftarrow b = a + c$

I $\to \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

$x = 2k\pi + \pi$

ب) $2\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x = 2$ $\sin^2 x - \sin x\cos x + 1 = 2$ $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\sin^2 x + \sin^2 x$ ، $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cancel{\sin^2 x} - \sin x\cos x = \cancel{\sin^2 x} + \cos^2 x \xrightarrow{\text{if } \cos x \neq 0} -\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = -1$

$\text{if } \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \cos 0 \Rightarrow x = 2k\pi$

شکل بگیر $\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

اگر $\cos x = -1$ باشد $\sin x = 0$ است و عبارت تعریف نشده می‌شود
پس جواب غیر قابل قبول محسوب می‌شود

عسل خبازیان　　　تکلیف ۱۶　　　دوازدهم دختر B

۴- الف) $\cos(\frac{\pi}{4}+x)\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4} \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)=\frac{1}{4}$

لذا $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\frac{1}{4} \Rightarrow \underbrace{\cos^2 x-\sin^2 x}_{\cos 2x}=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}$　　2

$\Downarrow$

$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ✓

ب) $\cos(2x-\frac{\pi}{9})=-\sin 2x$

یعنی ورداهم چیزه ولی ایده بهتری هم ندارم راستش گفتم که بیا و cos رو به sin تبدیل کن

وقتی میخوام اینکار رو کنیم یعنی باید بگیم جمع زاویه cos که داریم با sin که بدست میاریم باید بشه $\frac{\pi}{2}$

$2x-\frac{\pi}{9}+B=\frac{\pi}{2}$

$B=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}-2x=\frac{11\pi}{18}-2x \Rightarrow \sin(\frac{11\pi}{18}-2x)=-\sin 2x$

نشدنی x　$2x=2k\pi-\frac{11\pi}{18}+2x$

$2x=2k\pi+\pi-\frac{11\pi}{18}-2x$

$4x=2k\pi+\frac{7\pi}{18} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{72}$ ✓

۵. $\frac{\sin 4x+\sin^2 2x}{\sin 2x}-\sin^2 x=\cos^2 x \xRightarrow{\text{بازش می‌کنم}} \frac{2\sin 2x\cancel{\cos 2x}+\sin 2x}{\sin 2x}=\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1} \Rightarrow 2\cos 2x=0$　1,5

$2\cos 2x+1$

$\Downarrow \cos 2x=0 \Rightarrow \cos 2x=\cos 0$

لذا $x=k\pi \Leftarrow 2x=2k\pi$

۶- $\frac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}+\cancel{\cot\frac{x}{2}}$　$\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$　$\frac{\cos\frac{x}{2}\neq -1 \text{ و}}{\sin\frac{x}{2}\neq 0}$　$\sin^2\frac{x}{2}=1+\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2} \Rightarrow 0=\underbrace{1-\sin^2\frac{x}{2}}_{\cos^2\frac{x}{2}}+\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}$

لذا $0=2(\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})$　2

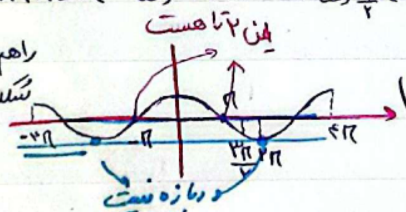
$0=\cos\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}+1)$

$\text{I}\ x=4k\pi \Leftarrow \frac{x}{2}=2k\pi \Leftarrow \cos 0=0=\cos\frac{x}{2}$

$\text{II}\ x=4k\pi+2\pi k = x=4k\pi\pm 2\pi \Leftarrow \frac{x}{2}=2k\pi\pm\pi \quad \cos\pi=-1=\cos\frac{x}{2}$

I و II $\xrightarrow{\text{همپوشانی دارند}}$ $4k\pi$

راهم چیزته به نظرم نمیخته شکل می‌کشیم (ببخشید حوصله از نوشتن ندارم)



$|-\pi-\pi|=2\pi$ ✓　　$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

۷ $\cos^2 x-\sin^2 x\cos^3 x=1$　　$-\sin^2 x-\sin^2 x\cos^3 x=0 \Rightarrow -\sin^2 x(1+\cos^3 x)=0 \rightarrow \sin x=0=\sin 0$　1,5

$1-\sin^2 x$

$x=2k\pi+0 ,\ x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=k\pi$ ✓

$\cos^3 x+1=0 \Rightarrow \cos 3x=-1=\cos\pi \Rightarrow 3x=2k\pi\pm\pi$

$x=\frac{2}{3}k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ هر ۳ حالت همپوشانی داره

$x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$ ✓

تعداد جواب ها ؟

$x=0 ,\ \pi ,\ 2\pi ,\ \frac{\pi}{3} ,\ \frac{5\pi}{3}$

عسل خبازیان   تکلیف ۱۶   دوازدهم دختر B

۸ـ با کمک جمع بی‌نا
بدافرمول

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan 3x$$

$\alpha = x$

$$\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}{\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)\times\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{\sqrt2}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)\times\frac{1}{\cos\alpha}}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$$

۲

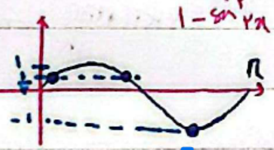
$$\tan(x-\frac{\pi}{4})=\tan 3x \longrightarrow 3x=k\pi+x-\frac{\pi}{4}$$

$$2x=k\pi-\frac{\pi}{4} \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

۹ـ

$$\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt2\cos 2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2\underbrace{\cos^2 2x}_{1-\sin^2 2x}=1+\sin 2x \xrightarrow{\text{مرتب}} 2-2\sin^2 2x=1+\sin 2x \Rightarrow 2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1$$

$a+c=b$ ریشه ها



$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

به مثلثمون ببینم $\begin{cases}\sin 2x=\frac12\\ \sin 2x=-1\end{cases}$

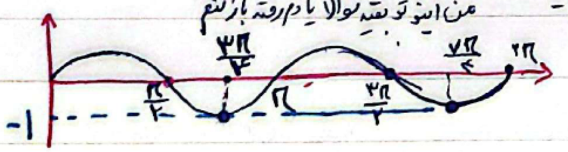
۱٫۷۵

۳ جواب

به ازای $x=\frac{5\pi}{12}$ منفی مي‌شود $\cos 2x$ یعنی جواب را اشکال است ۲ تا است

۱۰ـ الف) $\sin^4x-\cos^4x=1 \longrightarrow \underbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}_{\text{من اینو تو نقطه سوالا یادم رفته بازکنم}}\underbrace{(\sin^2x-\cos^2x)}_{-\cos 2\alpha}=1$ $\cos 2\alpha=-1$ $\frac{2\pi}{2}=T=\pi$

شکل بزنیم

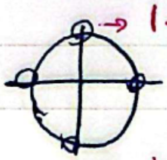


$\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$

۱٫۵

ب) $\sin^3x-\cos^3x=-1$ $(\sin x-\cos x)(\underbrace{\cancel{\sin^2x+\cos^2x}}_{1}+\sin x\cos x)=-1$ ← [illegible]

باید از راه تست ۴ نقطه اصلی بریم



α

$0+1=\frac{?}{1}$

$1-0=-1$ ✗

$0-1=-1$ ✓

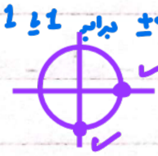
$-1-0=-1$ ✓

0 و $\frac{\pi}{2}$ و 2π

در معادلات به فرم $\pm\sin^n x\pm\cos^n x$ برابر 1 یا -1 - فقط کافی است نقاط اصلی را

ب) چک کنی!

$\sin^4 x-\cos^4 x=1$

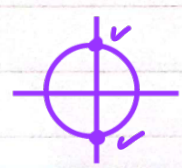


$x=2k\pi$ یا 0

$x=\frac{3\pi}{2}$

الف)

$\sin^4 x-\cos^4 x=1$



$x=\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{3\pi}{2}$

سوال ۵

$$\frac{2\sin 2x\cos 2x+\sin 2x}{\sin 2x}=\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{1}$$

$$\frac{\cancel{\sin 2x}(2\cos 2x+1)}{\cancel{\sin 2x}}=1 \xrightarrow{\sin 2x\neq 0} 2\cos 2x+1=1 \to \cos 2x=0$$

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \to \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{4}}$$

سوال ۷

$$\cos^2 x-\sin^2 x\cos 3x=1 \xrightarrow{\cos^2 x=1-\sin^2 x}$$

$$\cancel{1}-\sin^2 x-\sin^2 x\cos 3x=\cancel{1} \to \sin^2 x(1+\cos 3x)=0 \to \begin{cases}\sin x=0\\ \cos 3x=-1\end{cases}$$

$$\sin x=0 \to x=k\pi \to x=0,\ \pi,\ 2\pi$$ (۳) (۲) (۱)

$$\cos 3x=-1 \to 3x=2k\pi+\pi \to x=\frac{2k\pi+\pi}{3} \to x=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3}$$ (۵) (۴)

معادله ۵ جواب دارد

سوال ۹

$$\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{2}\cos 2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1+\sin 2x=2\cos^2 2x$$

$$1+\sin 2x=2-2\sin^2 2x \to 2\sin^2 2x+\sin 2x-1=0 \to \begin{cases}\sin 2x=-1\\ \sin 2x=+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\sin 2x=-1 \to 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \xrightarrow[k=1]{0\leq x\leq\pi} x=\frac{3\pi}{4}\ ✓$$

$$\sin 2x=\frac{1}{2} \to 2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{یا}\ 2k\pi+\frac{5\pi}{6} \xrightarrow[k=0]{0\leq x\leq\pi} x=\frac{\pi}{12}\ ✓\ \text{یا}\ \frac{5\pi}{12}\ ✗$$

چون عبارت به توان ۲ رسیده است جواب زائد تولید می‌کند

به ازای $x=\frac{5\pi}{12}$ ، $\cos 2x$ منفی می‌شود، چون جواب رادیکال است غ ق ق است

* معادله ۲ جواب دارد