«مطهره کمیلی» — مطهره کمیلی — ۱۹٫۲۵ آفرین — تکلیف شماره ی ۱۲ — مبحث مثلثات

سوال ۱ ←

الف) $\cos 2x = 3\sin x - 1$

↳ $\cancel{\cos 2x} - 1 = 3\sin x - 2 \longrightarrow 0 = 2\overset{t^2}{\sin^2 x} + 3\overset{t}{\sin x} - 2 \longrightarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{\overset{5}{9+16}}}{4} = \cancel{\frac{-8}{4}}$ یا $\boxed{\frac{1}{2}}$ ✓

(-1) $-2\sin^2 x$ — غ ق ق

$\sin x = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \boxed{2k\pi + \frac{\pi}{6}}$ ✓ یا $2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$ $\boxed{2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$ ✓

۵

ب) $\underbrace{\cos 2x}_{\cos^2 x - \sin^2 x} + \cos x - 2 = 0 \longrightarrow \cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}_{-(1-\cos^2 x)} + \cos x - 2 = 0 \longrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

جمع ضرایب = ۰ ← ریشه‌ها ← 1 ، $\frac{c}{a}$ ✓

$\cos x \begin{cases} \to -\frac{3}{2} \ \alpha \\ \to 1 \to \boxed{x = 2k\pi} \end{cases}$

سوال ۲ ←

الف) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 4x$

↳ $(\underbrace{\cancel{\sin^2 x + \cos^2 x}}_{1})(\underbrace{\cancel{\sin^2 x - \cos^2 x}}_{-\cos 2x}) = 2\sin 2x \cos 2x \longrightarrow -\cancel{\cos 2x} = 2\sin 2x \cancel{\cos 2x}$

$-\frac{1}{2} = \sin 2x \begin{cases} \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \ ✓ \\ \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6} \ ✓ \end{cases}$

۲

ب) $2\cos^2 + 2\sin x \cos x = 1 \longrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0 \longrightarrow \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \longrightarrow$

↳ $\cancel{1} + \cos 2x$ ↳ $\sin 2x$

$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\pi)$

$\Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi \longrightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}$

$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \pi \longrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{8}$

$\Big\} \Longrightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{8}}$ ✓

۱٫۷۵

سوال ۳ ←

الف) $\cancel{\cot x}(2\cos x + 1) = \frac{1}{\sin x} \times \tan x \longrightarrow \left(2\cos x + 1 = \frac{1}{\cos x}\right) \times \cos x \longrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\to \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \to \frac{-1 \pm \sqrt{\overset{3}{1+8}}}{4} \begin{cases} \to -1 \longrightarrow \cos x = -1 \to x = \boxed{2k\pi + \pi} \ ✗ \\ \to \frac{1}{2} \longrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \to x = \boxed{2k\pi \pm \frac{\pi}{3}} \ ✓ \end{cases}$

اگر cos x = -1 باشد، sin x = 0 است و عبارت تعریف نشده می‌شود

پس جواب غیر قابل قبول محسوب می‌شود

ب) $2\sin^2 x - \sin x \cos x + \cancel{\cos^2 x} = 2 \longrightarrow \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 1\right) \times 2 \to 1 - \cancel{\cos 2x} - \sin 2x - 2 = 0$

$\sin^2 x$ ①

↳ $\frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\quad -\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$

$\longrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \cancel{\frac{-1}{\sqrt{2}}} \ \underset{\sin(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \longrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \longrightarrow \boxed{x = k\pi}$ ✓

$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \longrightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{4}}$

$\frac{}{۴} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{}{۴}}$

سوال ۴ ←

الف) $\cos(\frac{\pi}{۴} + x)\cos(\cancel{x - \frac{\pi}{۴}}) = \frac{۱}{۴} \rightarrow \cos(\frac{\pi}{۴} + x)\sin(\frac{\pi}{۴} + x) = \frac{۱}{۴}$

$\sin(\frac{\pi}{۲} - (x - \frac{\pi}{۴})) \rightarrow \underbrace{\sin(\frac{۳\pi}{۴} - x) = \sin(\frac{\pi}{۴} + x)}_{\text{زاویه مکمل}}$

$= ۲\sin(۲x + \frac{\pi}{۲}) = \frac{۱}{۴} \rightarrow \sin(۲x + \frac{\pi}{۲}) = \frac{۱}{۲}$

$۲x + \frac{\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۶}}$

$۲x + \frac{\pi}{۲} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۳}}$

ب) $\cos(۲x - \frac{\pi}{۹}) = -\sin ۴x \rightarrow \cancel{-}\sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۹} - ۲x) = \cancel{-}\sin(۲x)$

$\rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x + \frac{\pi}{۹})$

$\rightarrow \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۹} - ۲x = ۴x + ۲k\pi$

$-\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۹} + \cancel{۲x} + ۲k\pi + \pi = \cancel{۲x}$

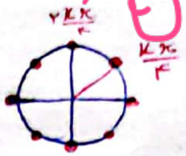
جواب ندارد

یا $\boxed{\frac{-۲k\pi}{۴} + \frac{۵\pi}{۳۶} = \cancel{۶}x}$

سوال ۵ ←

$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\sin 2x} - \sin^2 x = \cos^2 x \longrightarrow \frac{\sin 4x}{\sin 2x} + \cancel{1 - \sin^2 x = \cos^2 x} \longrightarrow \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = 0$

$\sin 4x = 0$ و $\sin 2x \neq 0$ ⟵ جواب کلی = $\boxed{k\pi \pm \frac{\pi}{4}}$ ✓



②

سوال ۶ ←

$\frac{x}{2} = t \longrightarrow \frac{\sin t}{1+\cos t} = \frac{1+\cos t}{\sin t} \longrightarrow$ درصورتی عدد با معکوس خود برابر میشود که عدد $\pm 1 =$ باشد

پس $\frac{\sin t}{1+\cos t} = \pm 1$ $\begin{cases} \longrightarrow 1+\cos t = \sin t \\ \longrightarrow 1+\cos t = -\sin t \end{cases}$ ②

$\Longrightarrow \begin{cases} 1 = (\sin t - \cos t) \\ 1 = -(\sin t + \cos t) \end{cases}$ $\longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\, 1 = \cancel{\sqrt{2}}(\sin(t-\frac{\pi}{4})) \longrightarrow t = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ یا $2k\pi + \pi$ ✓

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \longleftarrow -1 = \sqrt{2}(\sin(t+\frac{\pi}{4})) \longrightarrow t = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ یا $2k\pi + \pi$

$\longrightarrow x = 2t \longrightarrow 2k\pi ,\ 2k\pi + \pi$

تناقض $= |+\pi \mp \pi| = 2\pi$ ✓

سوال ۷ ← ①⁄۷۵

$\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = \cancel{1} \longrightarrow -\sin^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 0$

$\hookrightarrow \cancel{1} - \sin^2 x$

$-\sin^2 x (1 + \cos 3x) = 0$ $\begin{cases} \longrightarrow \sin^2 x = 0 \longrightarrow 2k\pi ,\ 2k\pi + \pi \\ \longrightarrow 1 + \cos 3x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

۵ جواب

⟵ ۴ جواب $\{0, 2\pi, \pi+k, \frac{\pi}{3}\}$

-1

$\frac{5\pi}{3}$ یا

سوال ۸ ←

$\frac{1 - \tan x}{\cancel{1+\tan x}} = \tan 3x \longrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 3x + k\pi \longrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}}$ ✓

$\downarrow \tan(x+\frac{\pi}{4})$

②

سوال ۹ ←

$\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{2}\cos 2x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 + \sin 2x = 2\cos^2 2x \longrightarrow \cancel{1} + \sin 2x - \cancel{2} + 2\sin^2 2x = 0$

$\hookrightarrow 1 - \sin^2 2x$ $\quad -1$

جمع اولی و آخری ⟵ وسطی ⟵ ریشه ها ⟵ $\sin 2x = -1$ ⟵ $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ دربازه‌ی $[0, \pi]$ ⟵ $\frac{3\pi}{4}$ ✓ ✓

①⁄۷۵

$\sin 2x = +\frac{1}{2} \longrightarrow [0, \pi] \longrightarrow \frac{\pi}{12} ,\ \frac{5\pi}{12}$ ✓ ⟵ ۳ جواب دارد

به ازای $x = \frac{5\pi}{4}$ cos2x منفی میشود/ این جواب را [illegible] است

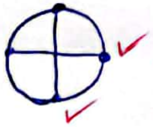
سوال ۱۰ ←

$\sin^4 x - \cos^4 x = 1 \longrightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)\cancel{(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 1 \longrightarrow \cos 2x = 1 \longrightarrow x = \begin{matrix} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{matrix} \longrightarrow$ ۳ جواب

$\downarrow \cos 2x \qquad 1$ ✓

②

$\sin^3 x - \cos^3 x \longrightarrow$



$\longrightarrow \begin{matrix} 0 \\ 2\pi \\ \frac{3}{2}\pi \end{matrix}$ ✓

سوال ۷

$$\cos^{۲}x - \sin^{۲}x\cos ۳x = ۱ \xrightarrow{\cos^{۲}x = ۱-\sin^{۲}x}$$

$$\cancel{۱} - \sin^{۲}x - \sin^{۲}x\cos ۳x = \cancel{۱} \longrightarrow \sin^{۲}x(۱+\cos ۳x) = ۰ \begin{cases} \sin x = ۰ \\ \cos ۳x = -۱ \end{cases}$$

$$\sin x = ۰ \longrightarrow x = k\pi \longrightarrow x = \overset{(۳)}{0},\ \overset{(۲)}{\pi},\ \overset{(۱)}{۲\pi}$$

$$\cos ۳x = -۱ \longrightarrow ۳x = ۲k\pi + \pi \longrightarrow x = \frac{۲k\pi + \pi}{۳} \longrightarrow x = \overset{(۵)}{\frac{\pi}{۳}},\ \pi,\ \overset{(۴)}{\frac{۵\pi}{۳}}$$

معادله ۵ جواب دارد

سوال ۹

$$\sqrt{۱+\sin ۲x} = \sqrt{۲}\cos ۲x \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱+\sin ۲x = ۲\cos^{۲}۲x$$

$$۱+\sin ۲x = ۲ - ۲\sin^{۲}۲x \longrightarrow ۲\sin^{۲}۲x + \sin ۲x - ۱ = ۰ \begin{cases} \sin ۲x = -۱ \\ \sin ۲x = +\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\sin ۲x = -۱ \longrightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \xrightarrow[k=۱]{۰ \le x \le \pi} x = \frac{۳\pi}{۴} \checkmark$$

$$\sin ۲x = \frac{۱}{۲} \longrightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \text{ یا } ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \xrightarrow[k=۰]{۰ \le x \le \pi} x = \overset{\checkmark}{\frac{\pi}{۱۲}} \text{ یا } \overset{\times}{\frac{۵\pi}{۱۲}}$$

چون عبارت به توان ۲ رسیده است جواب زائد تولید می‌کند

به ازای $x = \frac{۵\pi}{۱۲}$ $\cos ۲x$ منفی می‌شود، چون جواب رادیکال است غ‌ق‌ق است

★ معادله ۲ جواب دارد