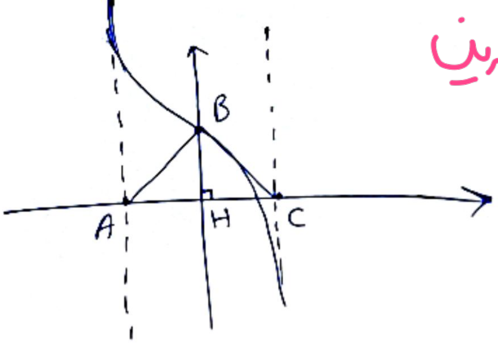
تکلیف شماره ۱۵ — شکیبا ب

۱۹/۲۵ آفرین




۱ـ

$$AC = \frac{\text{دوره}}{\text{ضریب}} = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{2}$$

$$BH \longrightarrow x=0 \longrightarrow y = \tan(-2(0)+\frac{\pi}{4})$$

$$y = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1 \longrightarrow BH = 1$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\frac{\pi}{2}\times 1}{2} = \frac{\pi}{4}$$ جواب

۲

---

۲ـ

$$x^2 - (\sin a)x - \frac{1}{4}\cos^2 a = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \rightarrow y=0 \longrightarrow \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\sin a - \frac{1}{4}\cos^2 a = 0 \longrightarrow \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\sin a - \frac{1}{4}(1-\sin^2 a) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\sin a - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin^2 a = 0$$

$$\frac{1}{4}\sin^2 a - \frac{2}{3}\sin a + \frac{7}{36} = 0 \xrightarrow{\times 36} 9\sin^2 a - 24\sin a + 7 = 0$$

$$\Delta = 24^2 - 4(7)(9) = 324$$

$$\sqrt{\Delta} = 18$$

$$\sin a = \frac{24 \pm 18}{18}$$

$\sin a = 2.3$ — غ ق ق ✗

$\boxed{\sin a = \frac{1}{3}}$ ق ق

$$\cos a = \frac{\sqrt{8}}{3} \longrightarrow 1+\tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{8}}{3})^2} = \frac{9}{8}$$ جواب

۲

---

۳ـ

$$\log(\sin a) - \log(-\cos a) = \log 3 \xrightarrow[\text{دامنه}]{\text{با توجه به}} -\cos a > 0$$

$$\cos a < 0$$

$$\log\frac{\sin a}{-\cos a} = \log 3 \longrightarrow \frac{\sin a}{-\cos a} = 3 \longrightarrow \sin a = -3\cos a \xrightarrow{\div \cos a} \tan a = -3$$

$$\cos a < 0 \longrightarrow \cos a = \frac{-1}{\sqrt{10}} \qquad \sin a = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin a - \cos a = \frac{3}{\sqrt{10}} - (\frac{-1}{\sqrt{10}}) = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$ جواب

۲

---

۴ـ

$$\sin^4\theta + \cos^2\theta = \frac{4}{5} \longrightarrow \sin^4\theta + (1-\sin^2\theta) = \frac{4}{5}$$

$$\sin^4\theta - \sin^2\theta + \frac{1}{5} = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(\frac{1}{5})(1) = \frac{1}{5}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2} \checkmark$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}{2} \checkmark$$

هر دو جواب برای $\sin^2\theta$ قابل قبول هستند و تفاوتی در پاسخ $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ ایجاد نمی‌کنند.

۲

نکته ساب

$$\text{if } \sin^2\theta = \frac{1+\frac{\sqrt5}{5}}{2} \longrightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1+\frac{\sqrt5}{5}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt5}{5}}{2}$$

$$\cos^4\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{1-\frac{\sqrt5}{5}}{2}\right)^2 + \frac{1+\frac{\sqrt5}{5}}{2} = \frac{1+\frac{1}{5}-\cancel{\frac{2\sqrt5}{5}}+2+\cancel{\frac{2\sqrt5}{5}}}{4} = \frac{3+\frac{1}{5}}{4} = \frac{4}{5}$$

جواب

---

۵-

$$\underbrace{\sin x \tan x}_{\frac{\sin^2 x}{\cos x}} - \frac{1}{\cos x} > 0 \longrightarrow \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x} > 0 \longrightarrow \frac{-\cos^2 x}{\cos x} > 0$$

$$\cos x < 0$$

۲

در صورت ۳ باید منفی باشد.

$$\frac{3\sin x + \sin x\cos x}{\underbrace{2-2\cos^2 x}} < 0$$

$$0 < \cos^2 x \leq 1 \rightarrow 0 > -2\cos^2 x \geq -2 \longrightarrow \underbrace{2 > 2-2\cos^2 x \geq 0}_{\text{مثبت}}$$

طبق صورت سوال

$$\cos x \neq 0$$

$$\longrightarrow 3\sin x + \sin x\cos x < 0 \longrightarrow \sin x(\underbrace{3+\cos x}_{\text{مثبت}}) < 0 \longrightarrow \sin x < 0$$

پس در ناحیه سوم قرار دارد.

---

۶-

$$\frac{2}{\sin x} + \frac{3}{\cos x} = 0 \longrightarrow \frac{2\cos x + 3\sin x}{\sin x\cos x} = 0 \longrightarrow 2\cos x + 3\sin x = 0$$

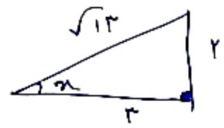
$$\cos x = \frac{-3}{2}\sin x$$

۲

sin و cos مختلف العلامت اند.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x + \left(\frac{-3}{2}\sin x\right)^2 = 1$$

$$\frac{13}{4}\sin^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{13} \longrightarrow \sin x = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$$




$$\text{if } \sin x = \frac{2}{\sqrt{13}} \longrightarrow \cos x = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sin x\cos x} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{-3}{\sqrt{13}}} = \frac{-13}{6}$$

جواب

نکته ثابت

۷ـ $\dfrac{\sqrt{1+\sin ۵۰}}{\sin ۵۰ + \sin ۱۰}$ ۱٫۵

$\sin ۵۰ = \cos ۴۰ = ۲\cos^۲ ۲۰ - ۱ \longrightarrow \sqrt{1+\sin ۵۰} = \sqrt{۲\cos^۲ ۲۰ \cancel{-۱} \cancel{+۱}} = \sqrt{۲}\cos ۲۰$

$$\begin{cases} \sin ۵۰ = \cos ۴۰ = ۲\cos^۲ ۲۰ - ۱ \\ \sin ۱۰ = \cos ۸۰ = ۲\cos^۲ ۴۰ - ۱ = ۲(۲\cos^۲ ۲۰ - ۱)^۲ - ۱ = ۸\cos^۴ ۲۰ + ۲ - \end{cases}$$

$۸\cos^۲ ۲۰ - ۱ = ۸\cos^۴ ۲۰ - ۸\cos^۲ ۲۰ + ۱$

$\sin ۵۰ + \sin ۱۰ = ۸\cos^۴ ۲۰ - ۸\cos^۲ ۲۰ \cancel{+۱} + ۲\cos^۲ ۲۰ \cancel{-۱} = ۸\cos^۴ ۲۰ - ۶\cos^۲ ۲۰$

$$\frac{\sqrt{1+\sin ۵۰}}{\sin ۵۰ + \sin ۱۰} = \frac{\sqrt{۲}\cos ۲۰}{۸\cos^۴ ۲۰ - ۶\cos^۲ ۲۰} = \frac{\sqrt{۲}\cancel{\cos ۲۰}}{\cancel{\cos ۲۰}(۸\cos^۳ ۲۰ - ۶\cos ۲۰)} = \frac{\sqrt{۲}}{۸\cos^۳ ۲۰ - ۶\cos ۲۰}$$

---

۸ـ $(۱ - ۲\sin^۲ ۵)(۲\cos^۲ ۱۰ - ۱)\left(\dfrac{۱ - \tan^۲ ۲۰}{۱ + \tan^۲ ۲۰}\right)$ ۲

$\sin^۲ ۵ = \dfrac{۱ + \cos ۱۰}{۲} \rightarrow ۲\sin^۲ ۵ = ۱ - \cos ۱۰ \longrightarrow ۱ - ۲\sin^۲ ۵ = \cos ۱۰$

$۲\cos^۲ ۱۰ - ۱ = \cancel{۱} + \cos ۲۰ \cancel{-۱} = \cos ۲۰$

$$\frac{۱ - \tan^۲ ۲۰}{۱ + \tan^۲ ۲۰} = \frac{\dfrac{\cos^۲ ۲۰ - \sin^۲ ۲۰}{\cancel{\cos^۲ ۲۰}}}{\dfrac{۱}{\cancel{\cos^۲ ۲۰}}} = \cos^۲ ۲۰ - \sin^۲ ۲۰ = \cos ۴۰$$

$$= \cos ۱۰ \cos ۲۰ \cos ۴۰ \xrightarrow[\sin ۱۰ \text{ بر}]{\text{ضرب و تقسیم}} \underbrace{\underbrace{\underbrace{\sin ۱۰ \cos ۱۰}_{\frac{۱}{۲}\sin ۲۰} \cos ۲۰}_{\frac{۱}{۴}\sin ۴۰} \cos ۴۰}_{\frac{۱}{۸}\sin ۸۰} = \frac{۱}{۸}\sin ۸۰$$

$$= \frac{\frac{۱}{۸}\cos ۱۰}{\sin ۱۰} = \frac{۱}{۸}\cot ۱۰$$

جواب

[illegible]

$$2\sin\hat{B}\sin\hat{C} = 1+\cos A - (\cos(\underbrace{\pi - \hat{A}}_{B+C}))$$

۱۰-

۲

$$2\sin\hat{B}\sin\hat{C} = 1-\cos B\cos C+\sin B\sin C$$

$$1 = \sin\hat{B}\sin\hat{C} + \cos\hat{B}\cos\hat{C} \longrightarrow 1 = \cos(\hat{B}-\hat{C}) \to \hat{B}-\hat{C} = 0$$

$$\hat{B}=\hat{C}=72$$

$$\hat{A} = 180-(\hat{B}+\hat{C}) = 180-(72+72) = 36$$ جواب

$$\sqrt{1+\sin 50^\circ} = \sqrt{1+\cos 40^\circ} \xrightarrow[1+\cos 40^\circ = 2\cos^2 20^\circ]{\text{فرمول طلایی}} \sqrt{2\cos^2 20^\circ} = \sqrt{2}\,|\cos 20^\circ| = \sqrt{2}\cos 20^\circ$$

۲

$$\sin 50^\circ + \sin 10^\circ = \sin(30^\circ+20^\circ)+\sin(30^\circ-20^\circ) =$$

$$\sin 30^\circ\cos 20^\circ + \cancel{\sin 20^\circ\cos 30^\circ} + \sin 30^\circ\cos 20^\circ - \cancel{\sin 20^\circ\cos 30^\circ} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\cos 20^\circ = \cos 20^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \boxed{\sqrt{2}}$$