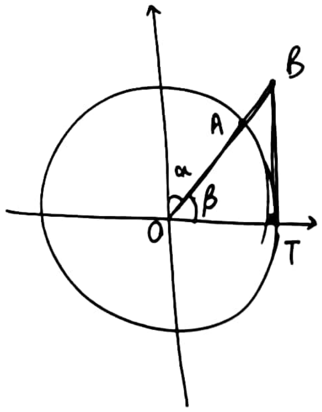
تکلیف شماره ۱۴    حسابان    19 آفرین ۱۱

۱ـ ②



$OT = OA = ۱$   شعاع دایره مثلثاتی

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲} \rightarrow$ متمم اند

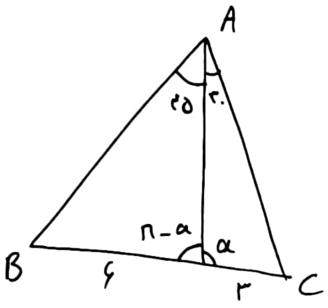
$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{OT}{OB} = \frac{۱}{OB} = \frac{۱}{\underbrace{OA}_{۱} + AB}$$

$$\sin\alpha = \frac{۱}{۱+AB} \rightarrow ۱ + AB = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

$$\boxed{AB = \frac{۱}{\sin\alpha} - ۱} \checkmark$$

---

۲ـ ②



$$\frac{۳}{\underbrace{\sin ۳۰}_{\frac{۱}{۲}}} = \frac{AC}{\sin\alpha} \rightarrow AC = ۶\sin\alpha$$

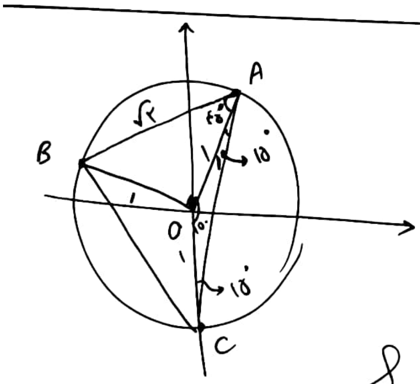
$$\frac{۶}{\underbrace{\sin ۴۵}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}} = \frac{AB}{\underbrace{\sin(\pi-\alpha)}_{\sin\alpha}} \rightarrow AB = ۶\sqrt{۲}\sin\alpha$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{۶\sqrt{۲}\sin\alpha}{۶\sin\alpha} = \boxed{\sqrt{۲}}$$ جواب

✓

---

۳ـ ①



$OC = OA = OB = ۱$    $\hat{A} = ۶۰^\circ$

$A \left| \begin{matrix} \frac{۱}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{matrix} \right.$    $B \left| \begin{matrix} \frac{-\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \end{matrix} \right.$

الف) مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ ؟

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin\hat{A}$$

$AB = \sqrt{۲}$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{۱}{۲}-۰\right)^۲ + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱\right)^۲} = \sqrt{\frac{۷-۴\sqrt{۳}}{۴}} = \sqrt{\frac{(۲-\sqrt{۳})^۲}{۴}}$$

$$= \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$$

★ راه حل پایین صفحه نوشته شده است

[illegible]

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۲} \times \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۶}-\sqrt{۱۸}}{۸} = \frac{۲\sqrt{۶}-۳\sqrt{۲}}{۸}$$

ب) محیط $\overset{\triangle}{ABC}$ ؟

$AB = \sqrt{۲}$

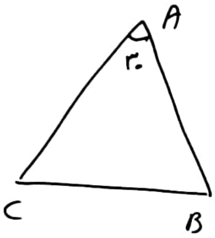
$AC = \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}-۰\right)^۲+\left(\frac{۱}{۲}-(-۱)\right)^۲} = \sqrt{\frac{۳}{۴}+\frac{۹}{۴}} = \sqrt{۳}$$

$$AB+AC+BC = \sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۲}{۲}$$

---

۴-



$AC = \log_۳^{۱۶} = ۴\log_۳^۲$

$AB = \log_۲^{۲۷} = ۳\log_۲^۳$

۲

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AC \times AB \times \underbrace{\sin\hat{A}}_{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \log_۳^{۱۶} \times \log_۲^{۲۷} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times$$

$$۴\cancel{\log_۳^۲} \times ۳\cancel{\log_۲^۳} = \frac{۱}{۴} \times ۱۲ = \boxed{۳}$$ ✓ جواب

---

۵-

if $x = \cos a \longrightarrow ۲x^۴ - x^۲ - \sin^۲ a\,(۲\sin^۲ a - ۱) = ۱$

۲

$$\longrightarrow ۲\cos^۴ x - \cos^۲ x - \sin^۲ x\,(۲\sin^۲ x - ۱) = ۱$$

$$\underbrace{۲\cos^۴ x - ۲\sin^۴ x} + \underbrace{\sin^۲ x - \cos^۲ x}_{-\cos ۲x} = ۱$$

$$۲(\cos^۴ x - \sin^۴ x) = ۲(\underbrace{\cos^۲ x - \sin^۲ x}_{\cos ۲x})(\underbrace{\cos^۲ x + \sin^۲ x}_{۱}) = ۲\cos ۲x$$

$$\longrightarrow ۲\cos ۲x - \cos ۲x = ۱ \longrightarrow \cos ۲x = ۱ \longrightarrow \boxed{\sin ۲x = ۰}$$ ✓ جواب

$$\cos^۲ ۲x + \sin^۲ ۲x = ۱ \longrightarrow ۱ + \sin^۲ ۲x = ۱$$

$$\sin^۲ ۲x = ۰ \longrightarrow \sin^۲ ۲x = ۰$$

[illegible]

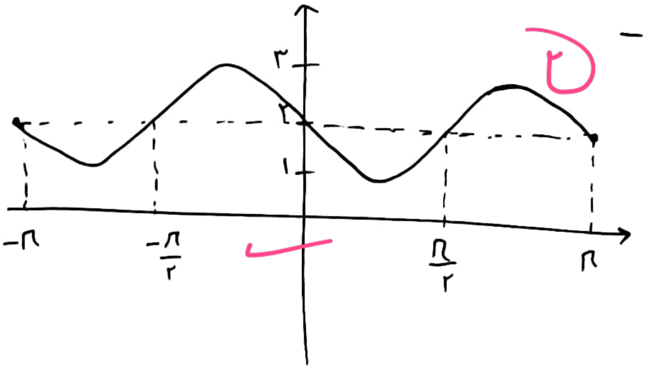
۶-

$y = -۲\sin x\cos x + ۲ \qquad [-\pi, \pi]$

$\sin x\cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$

$y = ~~-۲\sin~~ -۲ \times \frac{۱}{۲}\sin ۲x + ۲$

$y = -\sin ۲x + ۲ \qquad T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$

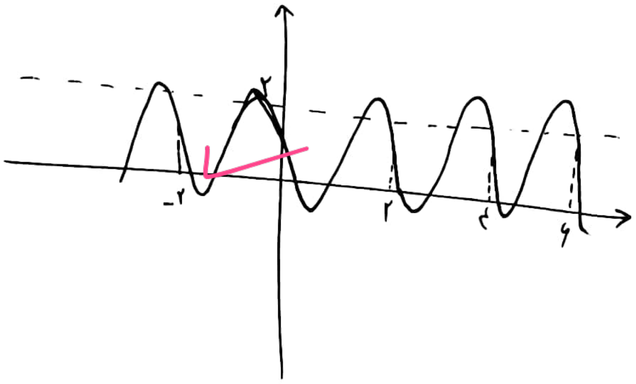


(۲)

ب) $y = ۲\cos\left(x + \frac{۱}{۲}\right)\pi + ۱ \qquad [-\pi, ۲\pi]$

$y = ۲\cos\left(x\pi + \frac{\pi}{۲}\right) + ۱ = -۲\sin x\pi + ۱$

$T = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$

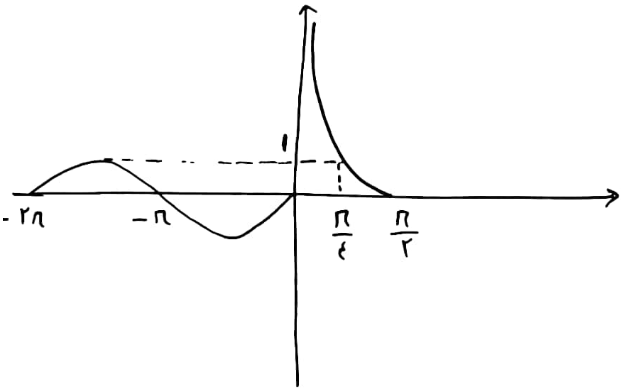


---

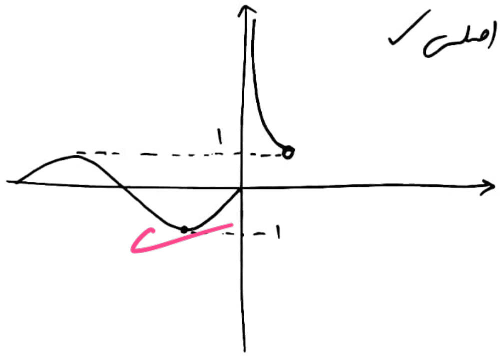
۷-

$$f(x) = \begin{cases} \cot x & ۰ < x < \frac{\pi}{۴} \\ \sin x & x \leq ۰ \end{cases} \qquad R_f = [-۱, +\infty)$$

(۲)



$\longrightarrow$



نمودار اصلی ✓

---

۸-

$$f(x) = a + b\,\underbrace{\underbrace{\sin(cx)\cos(cx)}_{\frac{۱}{۲}\sin(۲cx)}\cos(۲cx)}_{\frac{۱}{۴}\sin(۴cx)} = a + \frac{۱}{۴}b\sin(۴cx)$$

(۲)

$T_{\text{اصلی نمودار}} = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۱۰} = \frac{۲\pi}{۵} \longrightarrow T = \frac{\cancel{۲\pi}}{|۴c|} = \frac{\cancel{۲\pi}}{۵} \longrightarrow |۴c| = ۵$

$۴c = \pm ۵$

$\boxed{c = \frac{۵}{۴}} \xleftarrow{c>۰} c = \pm\frac{۵}{۴}$

نکته ثابت

$f(x) = a + \frac{۱}{۴} b \sin(ax)$ $\qquad \sin\left(\frac{۵\pi}{۲}\right) = ۱$

$\text{if } x = \frac{\pi}{۲} \rightarrow f(x) = ۴ \rightarrow a + \frac{۱}{۴} b \left(\sin \frac{۵\pi}{۲}\right) = ۴ \rightarrow \begin{cases} a + \cancel{\frac{۱}{۴} b} = ۴ \\ a - \cancel{\frac{۱}{۴}} b = ۰ \end{cases}$

$\text{if } x = \frac{۳\pi}{۱۰} \rightarrow f(x) = ۰ \rightarrow a + \frac{۱}{۴} b \sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = ۰ \rightarrow$

$۲a = ۴$

$\boxed{b = ۸}$ $\qquad \boxed{a = ۲}$

$\frac{bc}{a} = \frac{۸ \times \frac{۵}{۴}}{۲} = \boxed{۵}$ ✓ جواب

---

-۹

$f(x) = a \cos bx + c$

طبق نمودار $\rightarrow T = \pi \rightarrow T = \frac{۲\cancel{\pi}}{|b|} = \cancel{\pi} \rightarrow b = \pm ۲ \rightarrow$ چون نمودار cos است علامت + و − b تفاوتی ایجاد نمی‌کند

$\boxed{b = ۲}$

②

$f(x) = a \cos(۲x) + c$

$\text{if } \cos ۲x = ۱ \rightarrow f(x) = -۴ \rightarrow$

$\text{if } \cos ۲x = -۱ \rightarrow f(x) = ۲ \rightarrow$

$\begin{cases} \cancel{a} + c = -۴ \\ \cancel{-a} + c = ۲ \end{cases} \rightarrow ۲c = -۲$

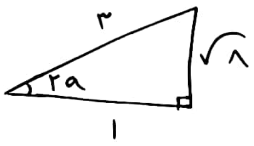
$\boxed{c = -۱}$

$\boxed{a = -۳}$

$f(x) = -۳ \cos ۲x - ۱$

$f(a) = -۳ \cos ۲a - ۱ = ۰ \rightarrow ۳\cos ۲a = -۱ \rightarrow \cos ۲a = \frac{-۱}{۳}$

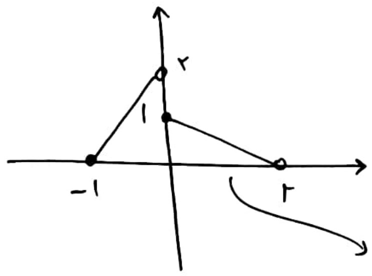
$\left|\tan ۲a\right| = \left|\frac{\sin ۲a}{\cos ۲a}\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{۸}}{۳}}{\frac{۱}{۳}}\right| = \boxed{\sqrt{۸}}$ ✓ جواب



---

-۱۰

②



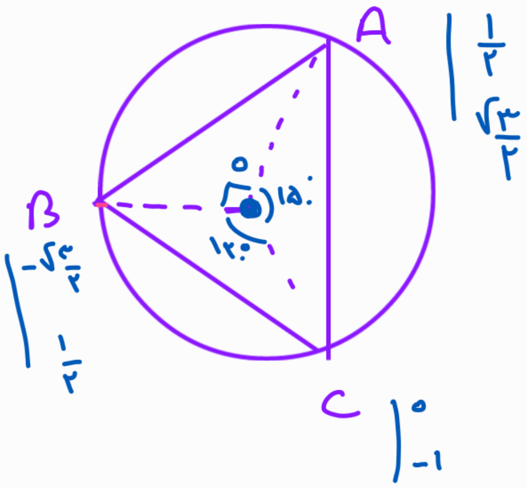
$T = ۳$

$f(-۳۴,۵) = f(-۳۶ + ۱,۵) = f(۱,۵) = f\left(\frac{۳}{۲}\right)$

شیب $m = \frac{-۱}{۲} \rightarrow y = \frac{-۱}{۲} x + ۱$

$y = \frac{-۱}{۲}\left(\frac{۳}{۲}\right) + ۱ = \boxed{\frac{۱}{۴}}$ ✓ جواب

## سوال ۳



$S_{AOC} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$S_{OAB} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$S_{OBC} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$

$BC^2 = 1^2 + 1^2 - 1 \times 1 \times 2 \times -\frac{1}{2} = 1 + 1 + 1 = 3 \longrightarrow BC = \sqrt{3}$

$AC^2 = 1^2 + 1^2 - 1 \times 1 \times 2 \times -\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 1 + \sqrt{3} \longrightarrow AC = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

$AB^2 = 1^2 + 1^2 \longrightarrow AB = \sqrt{2}$

$P_{ABC} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$