شماره‌ی تکلیف ۴ به نام خدا هستا کریمی

دوازدهم [illegible] B

⊕

①

$$\frac{a\sin\frac{٤\pi}{۳}+b\cos\frac{۷\pi}{۶}}{a\sin\frac{۱۱\pi}{۶}+b\cos\frac{\pi}{۳}}=\tan\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow\frac{a\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})+b\cos(\pi+\frac{\pi}{۶})}{a\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۶})+b\cos\frac{\pi}{۳}}=$$

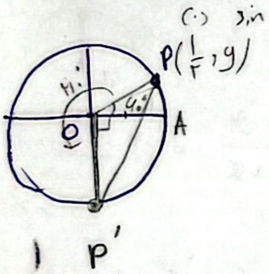
$$\frac{-a\sin\frac{\pi}{۳}-b\cos\frac{\pi}{۶}^{30}}{-a\sin\frac{\pi}{۶}+b\cos\frac{\pi}{۳}}=\frac{-\frac{a\sqrt{۳}}{۲}-\frac{b\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-a}{۲}+\frac{b}{۲}}=\frac{\cancel{-}\frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}}(a+b)}{\cancel{-}\frac{۱}{\cancel{۲}}(a-b)}=\frac{-\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{-۱}{۳}\Rightarrow$$

$$b-a=۳a+۳b\Rightarrow ٤a=-۲b\Rightarrow\boxed{۲a=-b}$$

$$*\ \tan\frac{۵\pi}{۶}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{-۲a}{a}=\boxed{-۲}$$ ج آخر

②



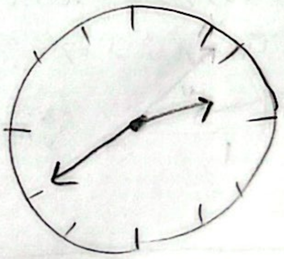
$$\cos\hat{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\hat{x}=۶۰^\circ$$

$$S_{OPP'}^{\Delta}=\frac{۱}{۲}OP\times OP'\sin\hat{O}=\frac{۱}{۲}\times۱\times۱\times\cancel{\sin۱۵۰}^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{٤}$$

③

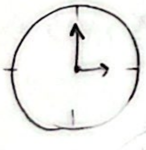
میزان جلو افتادگی عقربه‌ی ساعت‌شمار نصف مقدار دقیقه است

$$\frac{\pi}{۶}=۳۰^\circ\Longrightarrow$$ عقربه‌ی دقیقه‌شمار دو برابر این مقدار یعنی $\boxed{٤۰}$ دقیقه است. $\Longrightarrow$



ساعت $\boxed{۲:٤۰}$

④



$$\alpha=\left|\frac{۱۱M}{۲}-۳۰H\right|=۲۰^\circ\Rightarrow\frac{۱۱M}{۲}-۳۰(۳)=۲۰\Rightarrow\frac{۱۱M}{۲}=۱۱۰\Rightarrow\boxed{M=۲۰}$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{۹۰}{\cancel{۳۰(۳)}}-\frac{۱۱M}{۲}=۲۰\Rightarrow\frac{۱۱M}{۲}=۷۰\Rightarrow\boxed{M=\frac{۱٤۰}{۱۱}}=۱۲/۷$$

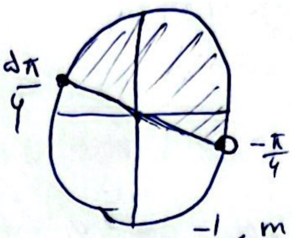
ج آخر

اولین بار پس از گذشت $\frac{۱٤۰}{۱۱}$ دقیقه و دومین بار پس از گذشت $\boxed{۲۰\text{ دقیقه}}$

⑤

$\frac{-\pi}{۶} < x < \frac{۵\pi}{۶}$

$\sin x = \frac{m-۳}{۵}$



Max $\sin x = ۱$

Min $\sin x = \sin\frac{-\pi}{۶} = \frac{-۱}{۲}$

$$\frac{-۱}{۲} < \sin x \leq ۱ \Rightarrow \frac{-۱}{۲} < \frac{m-۳}{۵} \leq ۱ \Rightarrow \frac{-۵}{۲} < m-۳ \leq ۵ \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{۱}{۲} < m \leq ۸}$$

$m \in \{۱, ۲, \ldots, ۸\} \Rightarrow$ ۸ عدد صحیح

---

⑥

$\tan ۱۵° = ۰/۲۵$

$$\frac{\sin(۱۰۵°) + k\cos(۲۵۵°)}{\cos(۱۶۵°) + ۲\sin(۱۹۵°)} = ۳ \longrightarrow$$

$$\frac{\sin(۹۰+۱۵°) + k\cos(۲۷۰° - ۱۵°)}{\cos(۱۸۰-۱۵°) + ۲\sin(۱۸۰+۱۵°)} = \frac{\cos ۱۵° - k\sin ۱۵°}{-\cos ۱۵° - ۲\sin ۱۵°} = ۳ \xrightarrow[\substack{\sin ۱۵° \sim ۱ \\ \cos ۱۵° \sim ۴}]{\tan ۱۵° = \frac{۱}{۴}}$$

$$\frac{۴-k}{-۴-۲} = ۳ \Rightarrow ۴-k = -۱۸ \Rightarrow \boxed{k = ۲۲}$$

راه دیگر:

$-۳\cos ۱۵° - ۶\sin ۱۵° = \cos ۱۵° - k\sin ۱۵°$

$k - ۶\sin ۱۵° = ۴\cos ۱۵° \xrightarrow[\div \cos ۱۵° \neq ۰]{}$

$(k-۶) \times \frac{۱}{۴} = ۴ \Rightarrow k = ۱۶ + ۶ = \boxed{۲۲}$

---

⑦

$$\frac{\tan(\frac{\pi}{۲} - x) - \cot(\pi - x)}{\cot(\frac{۳\pi}{۲} - x) + ۲\tan(۲\pi - x)} = \frac{\cot x + \cot x}{\tan x - ۲\tan x} = \frac{۲\cot x}{-\tan x} = -۲\,\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} =$$

$\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x} = ۲ \Rightarrow$ $۱ - \cos x = ۲ + ۲\cos x$

$۳\cos x = -۱ \Rightarrow \cos x = \frac{-۱}{۳}$

$\Rightarrow \sin x = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

$$\Rightarrow -۲\,\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x} = \frac{\frac{۱}{\cancel{۹}}}{\frac{۸}{\cancel{۹}}} \times -۲ = \boxed{\frac{-۱}{۴}}$$

---

⑧

A

B

$L_A = \frac{۳\pi}{۵} \times r_A$

$L_B = \frac{۹\pi}{۱۰} \times r_B$

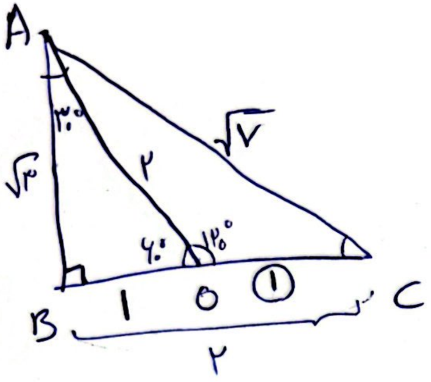
$$\xrightarrow{L_A = L_B} \frac{\cancel{۳}\cancel{\pi}}{\cancel{۵}} \times r_A = \frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}\cancel{\pi}}{\cancel{۱۰}} \times r_B \Rightarrow$$

$$\boxed{r_A = \frac{۳}{۲} r_B}$$

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱۰۸}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۱۰۸\pi}{۱۸۰} = \frac{۳\pi}{۵}$$

$$\frac{S_A}{S_B} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^۲ = \left(\frac{\frac{۳}{۲}\cancel{r_B}}{\cancel{r_B}}\right)^۲ = \boxed{\frac{۹}{۴}}$$

(۹)



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \sqrt{۳}$$

$$\sin ۲C = ?$$

$$\sin ۳۰ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AO = ۲ ,\ AB = \sqrt{۳}$$

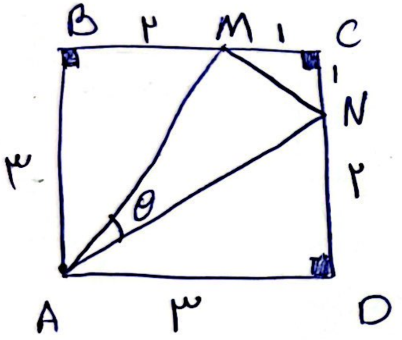
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{ABO}} + S_{\overset{\triangle}{AOC}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + S_{\overset{\triangle}{AOC}} = \sqrt{۳} \Rightarrow$$

$$S_{\overset{\triangle}{AOC}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱}{\cancel{۲}} \times \cancel{۲} \times OC \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \boxed{OC = ۱}$$

$$\sin ۲\hat{C} = ۲ \sin \hat{C} \cos \hat{C} = ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۷}} \times \frac{۲}{\sqrt{۷}} = \boxed{\frac{۴\sqrt{۳}}{۷}}$$

---

(۱۰)



$$AN = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

$$AM = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

$$S_{AB\overset{\triangle}{C}D} = ۳ \times ۳ = ۹ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADN}} = S_{\overset{\triangle}{ABM}} = ۳ \Rightarrow$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNC}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}} = ۹ - \underbrace{(۳+۳+\frac{۱}{۲})}_{۶٫۵} = ۲٫۵ = \frac{۵}{۲}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AMN}} = \frac{۵}{۲} = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۱۳} \times \sqrt{۱۳} \times \sin\theta \Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{۵}{۱۳}}$$