غزل رضی

$f_{(x)}=x+[x] \longrightarrow y=x+[x] \longrightarrow [y]=[x+[x]]=۲[x]$ ①

$x=y+[y] \Rightarrow y+۲[x] \longrightarrow y=x-۲[x]=f^{-1}_{(x)}$

الف) $f_{(x)}=f^{-1}_{(x)} \Longrightarrow x+[x]=x-۲[x] \longrightarrow ۳[x]=۰ \Longrightarrow ۰\leq x$

در بی‌شمار نقطه همدیگر را قطع می‌کنند

ب) $fof^{-1}_{(x)}=۲x-\frac{۳}{۲} \rightarrow x=۲x-\frac{۳}{۲} \longrightarrow x=\frac{۳}{۲}$

$f(\frac{۳}{۲})=۱٫۵+[۱٫۵]=۲٫۵\neq ۱٫۵$ غیرقابل قبول

② $y=\frac{ax+۳}{۴x+b} \rightarrow \frac{a}{۴}=\frac{-b}{۴} \rightarrow a=-b$

در توابع هموگرافیک این شرط باید باشد تا وارون خود برابر شود

$fof(۵-\sqrt{۶})=fof^{-1}(۵-\sqrt{۶})=۵-\sqrt{۶}$

③ $f_{(x)}=\frac{mx+۳}{x+m+۳}=y \longrightarrow yx+my+۳y=mx+۳$

$\Rightarrow mx-yx=my+۳y-۳ \Longrightarrow \frac{my+۳y-۳}{m-y}=x \longrightarrow$

$f^{-1}_{(x)}=\frac{(m+۳)x-۳}{m-x}$ $\quad f_{(x)}=f^{-1}_{(x)}$

$mx+۳x-۳$

$\frac{(m+۳)x-۳}{m-x}=\frac{mx+۳}{x+m+۳} \Longrightarrow$

$mx^۲+۳x^۲-\cancel{۳x}+\cancel{m^۲x}+۳mx-۳m+۳mx+۹x-۹=\cancel{m^۲x}+۳m-mx^۲-\cancel{۳x}$

$\rightarrow ۳m-mx^۲=(m+۳)x^۲+x(۶m+۹)-۳m-۹$

$\rightarrow x^۲(۲m+۳)+x(۶m+۹)-۶m\mp۹=۰$

$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{۶m+۹}{۶m+۹}=۱$

④ $y=|۲x+۵|-|۵x-۲|$

$$\begin{array}{c|c|c} & -\frac{۵}{۲} & \frac{۲}{۵} \\ \hline ۳x-۷ & ۷x+۳ & -۳x+۷ \end{array}$$

$y=-۳x+۷ \longrightarrow \frac{y-۷}{-۳}=x \longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{۷-x}{۳} \quad x\leqslant ۵٫۸$

⑤ $g(x)=۲f(۳x)-۱ \qquad ۲f(۳x)-۱=y \to f(۳x)=\frac{y+۱}{۲}$

$\frac{۱}{۳}f^{-1}\left(\frac{y+۱}{۲}\right)=x \qquad g(x)=y \longrightarrow g^{-1}(y)=x$

$g^{-1}(y)=\frac{۱}{۳}f^{-1}\left(\frac{y+۱}{۲}\right) \longrightarrow g^{-1}(x)=af^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right)+d \longrightarrow$

$a=\frac{۱}{۳} \quad b=۱ \quad c=۲ \quad d=۰ \qquad \frac{ac+d}{۲b}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}$

⑥ $f(x)=x+۲\sqrt{x} \qquad D_f=x\geqslant ۰ \quad R_f=x\geqslant ۰$

$R_f=D_{f^{-1}} \qquad f(x)=x+۲\sqrt{x}+۱-۱=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱=y \to$

$\sqrt{y+۱}=|\sqrt{x}+۱| \Longrightarrow \sqrt{y+۱}-۱=\sqrt{x} \to f^{-1}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲$

$x\geqslant ۰$

⑦ اکیداً صعودی است ← پس تابع و وارون تابع یکدیگر را $y=x-۱+۲^x$

روی $y=x$ قطع می‌کنن.

$x-۱+۲^x=x \longrightarrow ۲^x=۱ \longrightarrow x=۰$

$f(x)=x^{۳}+۴x \qquad y=\sqrt{f^{-1}(x)-x} \longrightarrow f^{-1}(x)-x\geq ۰$ ⑧

$f^{-1}(x)\geq x \longrightarrow f(f^{-1}(x))\geq f(x) \longrightarrow f(x)\leq x$

$x^{۳}+۴x\leq x \longrightarrow x^{۳}+۳x\leq ۰ \longrightarrow x(x^{۲}+۳)\leq ۰ \qquad \overset{۰}{-\,|\,+}$

نقطه‌ی پیوستگی $\longleftarrow (-\infty,۰]$

$f(x)=-x+\sqrt{x+۴} \qquad x\geq -۳$ ⑨

$y+x=\sqrt{x+۴} \xrightarrow{(\ )^{۲}} y^{۲}+x^{۲}+۲xy=x+۴ \longrightarrow x^{۲}+(۲y-۱)x+y^{۲}-۴=۰$

$\Delta\geq ۰ \longrightarrow ۴y^{۲}+۱-۴y-۴y^{۲}+۱۶=-۴y+۱۷\geq ۰ \longrightarrow y\leq \frac{۱۷}{۴}$

$x=\frac{۱-۲y\pm\sqrt{۱۷-۴y}}{۲} \xrightarrow{\text{قرینه نامساوی ۳}} y=\frac{۱-۲x+\sqrt{۱۷-۴x}}{۲}$

⊕ باید $x\geq -۳$ باشه

[redacted] $\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{۴ واحد به}} \frac{۱-۲(x+۴)+\sqrt{۱۷-۴(x+۴)}}{۲}$

$\longrightarrow \frac{-۲x-۷+\sqrt{۱-۴x}}{۲}=g(x)$

$\frac{-۲x-۷+\sqrt{۱-۴x}}{۲}=-x-۳ \longrightarrow -۲x-۷+\sqrt{۱-۴x}=-۲x-۶$

$۴x+۱=\sqrt{۱-۴x} \xrightarrow{(\ )^{۲}} ۱۶x^{۲}+۸x+۱=۱-۴x \longrightarrow ۱۶x^{۲}+۱۲x=۰$

$۴x^{۲}+۳x=۰ \longrightarrow x(۴x+۳)=۰ \longrightarrow x=۰,\ x=-\frac{۳}{۴}$ ✗

$\frac{-۷+۱}{۲}=\boxed{-۳}$ ✓

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=۲ \rightarrow \sqrt{y}=۲-\sqrt{x} \rightarrow y=(۲-\sqrt{x})^۲ \ , \ ۲-\sqrt{x}\geq ۰$ ⑩

$\boxed{۰\leq x\leq ۴}$ $\quad f\circ f(x)=۲-\sqrt{(۲-\sqrt{x})^۲}=۲-|۲-\sqrt{x}| \rightarrow$

$۲-۲+\sqrt{x}=\sqrt{x} \Rightarrow x=۴ \rightarrow y=۲$