:) صدآفرین ۱۹٫۵

غزل رضی

$f(x) = x+[x] \to y = x+[x] \to [y] = [x+[x]] = ۲[x]$ ①

$x = y+[y] \Rightarrow y+۲[x] \to y = x-۲[x] = f^{-1}(x)$ ✓ ۲

الف) $f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow x+[x] = x-۲[x] \to ۳[x] = ۰ \Rightarrow ۰ \leq x$

در بی ش نقطه همدیگر را قطع می‌کنند

ب) $fof^{-1}(x) = ۲x - \frac{۳}{۲} \to x = ۲x - \frac{۳}{۲} \to x = \frac{۳}{۲}$ ✓

$f(\frac{۳}{۲}) = ۱٫۵ + [۱٫۵] = ۲٫۵ \neq ۱٫۵$ ✓ غیرقابل قبول

---

② تابع هموگرافیک است

این شرایط باید باشد ۲

با دادن خود برابر می‌شود

$y = \frac{ax+۳}{۴x+b} \to \frac{a}{۴} = \frac{-b}{۴} \to a = -b$ ✓

$fof(۵-\sqrt{۶}) = fof^{-1}(۵-\sqrt{۶}) = ۵-\sqrt{۶}$ ✓

$f(x) = \frac{mx+۳}{x+m+۳} = y \to yx+my+۳y = mx+۳$ ③

$\Rightarrow mx - yx = my+۳y-۳ \Rightarrow \frac{my+۳y-۳}{m-y} = x \to$ ✓ ۲

$f^{-1}(x) = \frac{(m+۳)x-۳}{m-x}$ $\quad$ $f(x) = f^{-1}(x)$ ✓

$mx+۳x-۳$

$\frac{(m+۳)x-۳}{m-x} = \frac{mx+۳}{x+m+۳} \Rightarrow$

$mx^۲+۳x^۲-\cancel{۳x}+\cancel{m^۲x}+۳mx-۳m+۳mx+۹x-۹ = \cancel{m^۲x}+۳m-mx^۲-\cancel{۳x}$ ✓

$\to ۳m - mx^۲ = (m+۳)x^۲ + x(۶m+۹) - ۳m - ۹$ ✓

$\to x^۲(۲m+۳) + x(۶m+۹) - ۶m - ۹ = ۰$

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{۶m+۹}{۶m+۹} = -۱$ ✓

④ $y=|۲x+۵|-|۵x-۲|$

$$\begin{array}{c|c|c} & -\frac{۵}{۲} & \frac{۲}{۵} \\ \hline ۳x-۷ & ۷x+۳ & -۳x+۷ \end{array}$$

$y=-۳x+۷ \longrightarrow \dfrac{y-۷}{-۳}=x \longrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{۷-x}{۳} \quad x\leq ۵٫۸$ ②

⑤ $g(x)=۲f(۳x)-۱ \qquad ۲f(۳x)-۱=y \rightarrow f(۳x)=\dfrac{y+۱}{۲}$

$\dfrac{۱}{۳}f^{-1}\left(\dfrac{y+۱}{۲}\right)=x \qquad g(x)=y \longrightarrow g^{-1}(y)=x$ ②

$g^{-1}(y)=\dfrac{۱}{۳}f^{-1}\left(\dfrac{y+۱}{۲}\right) \longrightarrow g^{-1}(x)=a f^{-1}\left(\dfrac{x+b}{c}\right)+d \longrightarrow$

$a=\dfrac{۱}{۳} \quad b=۱ \quad c=۲ \quad d=۰ \qquad \dfrac{ac+d}{۲b}=\dfrac{۲}{۳}\times\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۱}{۳}$

⑥ $f(x)=x+۲\sqrt{x} \qquad D_f=x\geq ۰ \quad R_f=x\geq ۰$

$R_f=D_{f^{-1}} \qquad f(x)=x+۲\sqrt{x}+۱-۱=(\sqrt{x}+۱)^{۲}-۱=y \rightarrow$ ②

$\sqrt{y+۱}=|\sqrt{x}+۱| \Longrightarrow \sqrt{y+۱}-۱=\sqrt{x} \longrightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^{۲}$

$x\geq ۰$

⑦ $y=x-۱+۲^{x}$ اکیداً صعودی است ← پس تابع و وارون تابع یکدیگر را

روی $y=x$ قطع می کنند.

$x-۱+۲^{x}=x \longrightarrow ۲^{x}=۱ \longrightarrow x=۰$ ②

$f(x)=x^3+4x \qquad y=\sqrt{f^{-1}(x)-x} \rightarrow f^{-1}(x)-x \geq 0$ ⑧

$f^{-1}(x) \geq x \rightarrow f(f^{-1}(x)) \geq f(x) \rightarrow f(x) \leq x$ ②

$x^3+4x \leq x \rightarrow x^3+3x \leq 0 \rightarrow x(x^2+3) \leq 0 \quad \frac{\overset{0}{}}{-\ \ +}$

نقطه ی پیوسته ← $(-\infty, 0]$

$f(x)=-x+\sqrt{x+4} \qquad x \geq -3$ ⑨ ②

$y+x=\sqrt{x+4} \xrightarrow{(\ )^2} y^2+x^2+2xy=x+4 \rightarrow x^2+(2y-1)x+y^2-4=0$

$\Delta \geq 0 \rightarrow 4y^2+1-4y-4y^2+16=-4y+17 \geq 0 \rightarrow y \leq \frac{17}{4}$

$x=\frac{1-2y \pm \sqrt{17-4y}}{2} \xrightarrow{\text{قرینه نیمساز ۱و۳}} y=\frac{1-2x+\sqrt{17-4x}}{2}$

④ باید $x \geq -3$ با

[redacted] $\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{۴ واحد به}} \frac{1-2(x+4)+\sqrt{17-4(x+4)}}{2}$

$\rightarrow \frac{-2x-7+\sqrt{1-4x}}{2}=g(x)$

$\frac{-2x-7+\sqrt{1-4x}}{2}=-x-3 \rightarrow -2x-7+\sqrt{1-4x}=-2x-6$

$4x+1=\sqrt{1-4x} \xrightarrow{(\ )^2} 16x^2+8x+1=1-4x \rightarrow 16x^2+12x=0$

$4x^2+3x=0 \rightarrow x(4x+3)=0 \longrightarrow x=0,\ x=-\frac{3}{4}$ ✗

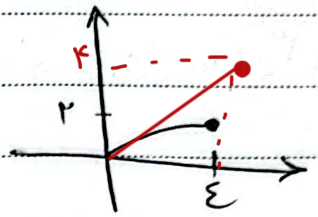
$\frac{-7+1}{2}=\boxed{-3}$

۲٫۵

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=۲ \rightarrow \sqrt{y}=۲-\sqrt{x} \rightarrow y=(۲-\sqrt{x})^۲ ,\ ۲-\sqrt{x}\geq ۰$ ⑩

$۰\leq x\leq ۴$ $\quad fof(x)=۲-\sqrt{(۲-\sqrt{x})^۲}=۲-|۲-\sqrt{x}| \rightarrow$

$۲-۲+\sqrt{x}=\sqrt{x} \Rightarrow x=۴ \rightarrow y=۲$



$\sqrt{x}=۲-\sqrt{y} \xrightarrow{\sqrt{x}\geq ۰} ۲-\sqrt{y}\geq ۰ \rightarrow \sqrt{y}\leq ۲$

$y\leq ۴ \longrightarrow \sqrt{y} \rightarrow y\geq ۰ \longrightarrow ۰\leq y\leq ۴$