سارا عبدالهی

۱۴٫۵

۱) ۱٫۵

$x+[x]=y$ $\qquad y=x-[y]$

$[x+[x]]=[y]$ $\qquad y=x-۲[x]$

$۲[x]=[y]$

$f(x)=f^{-1}(x)$

$\cancel{x}+[x]=\cancel{x}-۲[x]$ $\qquad ۳[x]=۰$

الف) بی‌شمار ✓ $\quad [x]=۰ \quad ۰\leq x<۱$

ب)

$fof^{-1}(x)=x=۲x-\frac{۳}{۲}$

$\frac{۳}{۲}=x$

$\frac{۳}{۲}\in D_{f^{-1}}$ یا R_f

برد تابع از هر عدد زوج تا عدد فرد بعدی است

★ جواب حقیقی ندارد

---

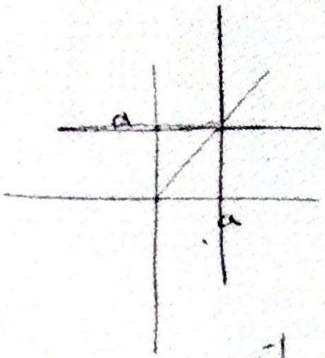
۲) ۲

$-\frac{b}{۴}=\frac{a}{۴}\Rightarrow a=-b$ ✓

یا

$a+b=۰ \Longrightarrow a=-b$ ✓

در این نوع توابع معکوسشان با خودشان برابر است ✓



$fof(x)\xrightarrow{f(x)=f^{-1}(x)} fof^{-1}(x)=x$

$fof^{-1}(۵-\sqrt{۶})=۵-\sqrt{۶}$ ✓

(۳ ①

$f(x)=\frac{mx+۳}{x+(m+۳)}$ $f^{-1}(x)=\frac{-(m+۳)x+۳}{x-m}$

$\frac{-(m+۳)x+۳}{x-m}=\frac{mx+۳}{x+(m+۳)} \Rightarrow -(m+۳)x^۲-(m+۳)^۲+۳x+۳(m+۳)=$

$mx^۲-m^۲x+۳x-۳m$

$(-m-۳-m)x^۲$ - - - —

$m^۲-m-۶=۰$ $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{S}{P}=\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}=\frac{۱}{-۶}=\frac{-۱}{۶}$

$\frac{mx+۳}{x+m+۳}=x \to mx+۳=x^۲+mx+۳x$

$x^۲+۳x-۳=۰ \to \frac{S}{P}=\frac{-۳}{-۳}=۱$

(۴ ۱٫۷۵

$f(x)=|۲x+۵|-|۵x-۲|$

$-\frac{۵}{۲}$ $\frac{۲}{۵}$

$-۲x-۵+۵x-۲$	$۲x+۵+۵x-۲$	$۲x+۵-۵x+۲$
$۳x-۷$	$۷x+۳$ ✓	$-۳x+۷$ ✓

$-۳y+۷=x$

$y=\frac{x-۷}{-۳} \longrightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}$ ✓

$D_{f^{-1}}=R_f=(-\infty,\frac{۲۹}{۵}]$

(۵ ②

$۲f(۳x)-۱=t$ $g(x)=t$

$f(۳x)=\frac{t+۱}{۲} \to ۳x=f^{-1}(\frac{t+۱}{۲}) \to x=\frac{f^{-1}(\frac{t+۱}{۲})}{۳}$ ✓

$g^{-1}(t)=x \to g^{-1}(t)=\frac{f^{-1}(\frac{t+۱}{۲})}{۳}$ ✓

$\to g^{-1}(x)=\frac{f^{-1}(\frac{x+۱}{۲})}{۳} \to a=\frac{۱}{۳}$ $b=۱$ $c=۲$ $d=۰$

$\frac{ac+d}{۲b} \Rightarrow \frac{\frac{۲}{۳}}{۲}=\frac{۱}{۳}$ ✓

(۶ ②

$x=y+۲\sqrt{y}$

$x=(\sqrt{y}+۱)^۲-۱$ $D_{f^{-1}}=R_f=x\geqslant ۰$ ✓

$x+۱=(\sqrt{y}+۱)^۲$

$\sqrt{x+۱}=\sqrt{y}+۱$

$(\sqrt{x+۱}-۱)^۲=y$ ✓

(۷

$f(x)=f^{-1}(x)$ $\quad f(f(x))=f(f^{-1}(x))=x$

۱,۵

$f(x-۱+۲^x)=x \longrightarrow \cancel{x}-۱+۲^x-۱+۲^{x-۱+۲^x}=\cancel{x}$

$۲^x+۲^{x+۱}=۲ \longrightarrow ۲^x(۱+۲^۱)=۲ \quad ۲^x=\frac{۲}{۳}$

$\xrightarrow{\log_۲} \log_۲ ۲^x=\log_۲ \frac{۲}{۳} \longrightarrow x=\log_۲ \frac{۲}{۳}$

$۲^x+x-۱=x \longrightarrow ۲^x=۱ \longrightarrow x=۰$
$y=۰$

(۸

$f^{-1}(x)\geqslant x$

$\xrightarrow{\text{از دو طرف } f(x) \text{ می‌گیریم}} x\geqslant f(x) \longrightarrow x\geqslant x^۳+۴x$

۲

$\longrightarrow x^۳+۳x\leqslant ۰$ $\quad x\leqslant ۰$

$x(\underbrace{x^۲+۳}_{+\ \text{همواره}})\leqslant ۰$

(۰) ← یک عدد

$\text{وارون} \longrightarrow f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{چپ}} f^{-1}(x+۴)=g(x)$ $\quad D_{f^{-1}}= x\geqslant ۴$

(۹

$f^{-1}(x+۴)=x-۳ \xrightarrow{f} x+۴=f(x-۳)$

۱/۷۵

$-(x-۳)+\sqrt{x-۳+۴}=x+۴ \Rightarrow -x+۳+\sqrt{x+۱}=x+۴$

$\sqrt{x+۱}=۲x+۱ \longrightarrow x+\cancel{۱}=۴x^۲+۴x+\cancel{۱}$

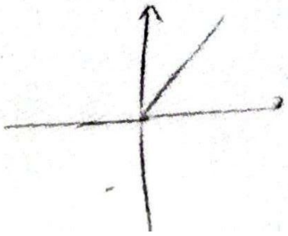
$۴x^۲+۳x=۰ \quad x(۴x+۳)=۰ \quad x=۰$

$x=-\frac{۳}{۴}$ غ ق ق ← جواب رادیکال منفی می‌شود

$f^{-1}(x)=f(x) \Longrightarrow fof(x)=fof^{-1}(x)=x$ (۱۰

۱

$x\geqslant ۰$

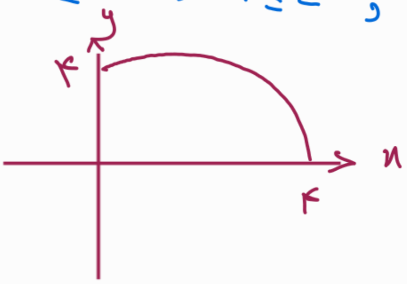


سوال ۱۰

$\sqrt{y} = -\sqrt{x} + ۲ \xrightarrow{y \geq ۰} \sqrt{x} \leq ۲ \longrightarrow x \leq ۴ \;\text{و}\; x \geq ۰$

$D_f = [۰, ۴] \quad \text{I}$

$R_f = [۰, ۴] \quad \text{II}$



$\text{I} \cap \text{II} \longrightarrow D_f = R_f \longrightarrow f(x) = f^{-1}(x)$

$fof(x) = fof^{-1}(x) = x$

جواب نهایی →