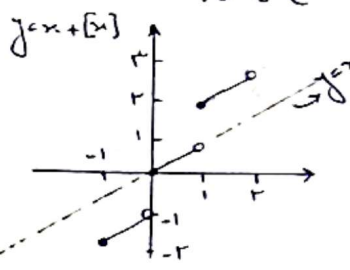


۱. الف) خط $y=x$ روی شکل کشیده و واضح است که در بازه $x \in [a, b]$ این دو نمودار یکدیگر را قطع نمی کنند پس $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ هم دایره را در بی سار نقطه قطع نمی کنند.

ب) از غنای باید $f \circ f^{-1}(x) = x$ و $x \in D_{f^{-1}} \rightarrow x \in \mathbb{R} \rightarrow x \in \mathbb{R} \rightarrow x \in \mathbb{R}$ باشد یعنی $x \in \mathbb{R}$ از روی شکل واضح است که f عکس‌پذیر نیست پس جواب ندارد!



۲. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ این دو دایره نیز سار نامیدنی است. $\rightarrow \frac{-b}{c} = \frac{a}{c} \rightarrow a = -b$

یعنی y با هم مساوی اند! $\rightarrow \frac{-b}{c} = \frac{a}{c} \rightarrow a = -b$

و حتی $a = -b$ است یعنی $f^{-1}(x)$ و $f(x)$ در واقع یک نمودار هستند و $f(x) = f^{-1}(x)$ پس:

$f \circ f^{-1}(x) = f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow f \circ f^{-1}(x) = x$

۳. $f(x) = \frac{mx+n}{x+m+n} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{(m+n)x-n}{x-m} = \frac{-(m+n)x+n}{x-m}$ نقطه تقاطع $\frac{mx+n}{x+m+n} = \frac{-(m+n)x+n}{x-m}$

$\rightarrow mx^2 + nx - m^2x - nm = -(m+n)x^2 - (m+n)^2x + nx + nm + 9$

$\rightarrow (2m+n)x^2 + (-m^2 + m^2 + 4m + 9)x - 4m - 9 = 0 \rightarrow (2m+n)x^2 + (4m+9)x - 4m - 9 = 0$

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\beta \alpha} = \frac{S}{P} = \frac{-b}{\frac{a}{c}} = \frac{-b}{c} = \frac{-4m-9}{-4m-9} = 1$

۴. $f(x) = \sqrt{(2x+5)^2} - \sqrt{(x-2)^2} = |2x+5| - |x-2|$

$x \geq \frac{5}{2} \rightarrow 2x+5 - (x-2) = x+7$ منفی $\rightarrow f^{-1}(x) \rightarrow x = -y+7 \rightarrow \frac{x-7}{-1} = y$ و $x \leq \frac{5}{2}$

$x < \frac{5}{2} \rightarrow 2x+5 + (x-2) = 3x+3$ معرکی

$x < -\frac{5}{3} \rightarrow -2x-5 + (x-2) = -x-7$ معرکی

۵. $g(x) = 2f(x) - 1 \rightarrow \frac{g(x)+1}{2} = f(x) \rightarrow 2x = f^{-1}\left(\frac{g(x)+1}{2}\right) \rightarrow x = \frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{g(x)+1}{2}\right)$

$\frac{g(x)}{g^{-1}(y)} = x \rightarrow g^{-1}(y) = \frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{y+1}{2}\right) \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$ $a = \frac{1}{2}, b = 1$
 $c = 2, d = 0$

$\rightarrow \frac{ac+d}{rb} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 + 0}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

$$f(x) = x + \sqrt{x+1} - 1 = (\sqrt{x+1})^2 - 1 \rightarrow f^{-1}(x) \Rightarrow x = (\sqrt{y+1})^2 - 1 \rightarrow (x+1) = (\sqrt{y+1})^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{y+1} \rightarrow \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{y+1} \rightarrow y = x+1+1-2\sqrt{x+1} = x+2-2\sqrt{x+1} \\ \rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$$

این تابع از جابجایی متقابل به دست آمده است پس هر دو هم معکوس هستند پس $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ $y = x - 1 + 2\sqrt{x}$ $\rightarrow f^{-1}(x)$ و $f(x)$ پس $f(x) = x$ یکدیگر را روی $y = x - 1 + 2\sqrt{x}$ قطع می کنند:

$$x - 1 + 2\sqrt{x} = x \rightarrow -1 + 2\sqrt{x} = 0$$

روی این نقطه یکدیگر را قطع می کنند!

$$2\sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow$$

برای تعیین $f^{-1}(x) \gg x$ باید جدول تعیین علامت داشته باشیم و برای داشتن این جدول هم باید نقاط برخورد $f^{-1}(x)$ و $f(x)$ را داشته باشیم $\leftarrow$ از آنجایی که $f(x)$ معکوس است پس محل برخوردش با $f^{-1}(x)$ روی $y = x$ است به عبارتی: محل برخورد $f(x)$ با $y = x$ = محل برخورد $f^{-1}(x)$ و x

$$x^2 + 2x = x \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x = 0$$

آنکه $f(x)$ به ازای $x \gg 0$ بالاتر از $y = x$ بوده است پس $f^{-1}(x)$ به ازای $x \gg 0$ پایین تر از $y = x$ است!

$$f^{-1}(x) - x \gg 0 \quad \frac{0}{+ \quad -} \rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

لگشمن! عدد صحیح ناشی است ($x=0$)

$$f(x) = -x + \sqrt{x+4} \xrightarrow[\text{اذا}]{\text{تعیین نسبت به نسیاز}} x = -y + \sqrt{y+4} \xrightarrow[\text{مربع}]{\text{اذا}} x+4 = -y + \sqrt{y+4} \\ y+4 = -x + \sqrt{x+4} \quad \leftarrow \text{مربع} \quad x = y+4 \quad \leftarrow \text{مربع} \quad y = x-4$$

می توانیم محل برخورد تابع با $y = x-4$ را با $y = x-4$ تعیین می کنیم چون داریم است

$$y+4 = -y + \sqrt{y+4} \rightarrow 4y^2 + 24y + 49 = y+4 \rightarrow 4y^2 + 23y + 45 = 0 \rightarrow y = \frac{-23 \pm \sqrt{(23)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 45}}{8} \rightarrow y = -3, -2.75$$

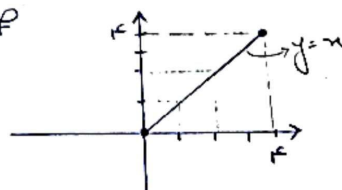
در نهایت نقطه $y = -3$ قابل است چون این مقادیر برای $f^{-1}(x)$ است پس باید دامنه $f(x)$ نیز همین کند $\leftarrow$ نقطه $y = -3$ قابل است

$$\sqrt{x+4} = y \rightarrow \sqrt{x+4} = -3 \rightarrow x+4 = 9 \rightarrow x = 5 \rightarrow f(x) = f^{-1}(x)$$

این تابع با تابع وارون خود برابر است:

$$f \circ f(x) \xrightarrow{f(x)=f^{-1}(x)} f \circ f^{-1}(x) = x, x \in D_{f^{-1}} \rightarrow D_{f^{-1}} = [0, 4] = R_f$$

نه برای برد $f(x)$ هم داریم: درست است که y است و $y \gg 0$ اما باید نسبت داشته باشیم که آن y بزرگتر از 4 باشد جواب y که بزرگتر از 4 می شود و x هیچگاه نمی تواند عددی باشد این مقدار اضافه را جدا می کنند پس $x \gg 0$.



$$\rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x} = 2 \rightarrow \sqrt{x} = 2 \rightarrow x = 4$$

سبب $x \in \emptyset$