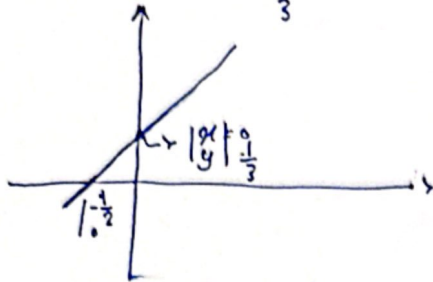


$$2y = 3x - 1 \rightarrow x = \frac{2y+1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}$$



$$S = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{12}$$

۱

چون بازه تعریف شده است یک به یک
 $y = (x-1)^2 + 2 \rightarrow y-2 = (x-1)^2$
 $\sqrt{y-2} = x-1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$
 $x \in [2, +\infty)$

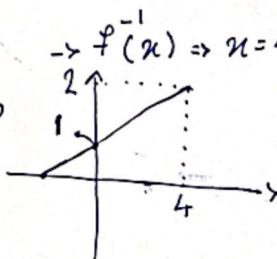
چون راس در بازه نیست تابع یک به یک
 است $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$
 $\sqrt{x-2} + 1 > 3 \rightarrow \sqrt{x-2} > 2$
 $x-2 > 4 \rightarrow x > 6$
 $x \in [6, +\infty)$

۲

$$2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = 2x - \sqrt{(2x-4)^2} \rightarrow 2x - |2x-4|$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4 \\ 4x-4 & 4 \end{array}$$

دوین زیر نیست



$$\rightarrow f^{-1}(x) \Rightarrow x = 4y - 4 \rightarrow y = \frac{x+4}{4}, x \in (-\infty, +4)$$

$$S = \frac{(1+2) \times 4}{2} = 6$$

۳

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow x_1 \sqrt{x_2^2-5} = x_2 \sqrt{x_1^2-5} \xrightarrow{\wedge 2} x_1^2 x_2^2 - 5x_1^2 = x_2^2 x_1^2 - 5x_2^2$$

$$\rightarrow -5x_1^2 = -5x_2^2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1 = \pm x_2$$

دو جواب در صورتی که هم علامت باشد و هم علامت نباشد
 مثبت است بقیه منفی ها برابر باشند باید $x_1 = x_2$ تابع یک به یک است

$$\frac{y}{\sqrt{y^2-5}} = x \rightarrow x \sqrt{y^2-5} = y \xrightarrow{\wedge 2} x^2 y^2 - 5x^2 = y^2 \rightarrow -5x^2 = y^2(1-x^2)$$

$$y^2 = \frac{-5x^2}{1-x^2} \rightarrow y = \sqrt{\frac{-5x^2}{1-x^2}}$$

$$f(x) \begin{cases} x^2 - 4x + k, & x \geq 2 \rightarrow S: 2, \quad IR: [k-4, +\infty) \\ -x^2 + 6x + 3k, & x < 2 \rightarrow S: 3, \quad IR: (-\infty, 8+3k) \end{cases}$$

که چون شامل در است
 $\emptyset = [k-4, +\infty) \cap (-\infty, 8+3k)$ تابع یک به یک باشد

$$8+3k < k-4 \rightarrow 2k < -12 \rightarrow k < -6$$

۵

$$f(x): x > 0 \rightarrow 4x \quad f^{-1}(x): x > 0 \quad \frac{x}{4}$$

$$f(x): x < 0 \rightarrow 2x \quad f^{-1}(x): x < 0 \quad \frac{x}{2}$$

بین ضرب x میانگین می گیریم

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8}x + b|x| \rightarrow \frac{3}{8}x + bx = \frac{4x}{8} \rightarrow b = -\frac{1}{8}$$

$$ab = -\frac{3}{64}$$

۶

$$\frac{3(2) + 4}{x + m} = -1 \rightarrow -\log x - b m = 10 \rightarrow m = -3 \quad f^{-1}(x) = x = \frac{3y + 4}{y - 3} = -\frac{-3x - 4}{1x - 3}$$

$$= \frac{3x + 4}{x - 3}$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

$$f \circ f^{-1}(x) + f^{-1}(x) = x \rightarrow x + \frac{3x + 4}{x - 3} = x \rightarrow \frac{3x + 4}{x - 3} = 0$$

$$3x + 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

۷

$$f(a) = -2$$

$$f(a) = 2 - g\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \rightarrow g\left(\frac{x}{2}\right) = 4 \rightarrow \frac{x}{2} = b$$

$$g(b) = 4$$

$$a = 3 - 2x$$

$$\rightarrow 4b + 0 = 2x + 3 - 2x = 3$$

۸

$$y = \frac{5x - 13}{1 - x} \xrightarrow{\text{نسبت به } x \text{ درجه اول کنیم}} y' = \left(\frac{5x - 13}{1 - x} \right)' = \frac{5x + 13}{1 + x} \xrightarrow{\text{درجه اول کنیم}} \frac{5(x - 2) + 13}{1 + (x - 2)} = \frac{5x + 3}{x - 1}$$

$$\xrightarrow{\text{درجه اول کنیم}} \frac{5x + 3}{x - 1} - 3 \rightarrow \frac{2x + 6}{x - 1} = f(x) \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x - 6}{x - 2} = \frac{x + 6}{x - 2}$$

$$\frac{x + 6}{x - 2} = \frac{2x + 6}{x - 1} \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 2x^2 + 2x - 12 \rightarrow x^2 - 3x - 6 = 0 \quad \Delta = 33$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \quad \& \quad \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \rightarrow \frac{3 + \sqrt{33}}{2} + \frac{3 - \sqrt{33}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

۹

$$y = f^{-1}(x) \Rightarrow y = x + 4[x] \xrightarrow{\text{اگر فرض کنیم}} [y] = [x + 4[x]] \xrightarrow{\text{فرض کنیم}} [y] = [x] + 4[x]$$

$$[y] = 5[x] \rightarrow \frac{1}{5}[y] = [x] \xrightarrow{\text{فرض کنیم}} \frac{1}{5}[y] = \frac{y - x}{4} \Rightarrow 4[x] = 5y - 5x$$

$$\rightarrow 5x = 5y - 4[x] \rightarrow x = \frac{5y - 4[x]}{5} \xrightarrow{\text{فرض کنیم}} y = x - \frac{4}{5}[x]$$

$$(f - g)(x) = x + 4[x] - x - \frac{4}{5}[x] = \frac{16}{5}[x]$$

۱۰