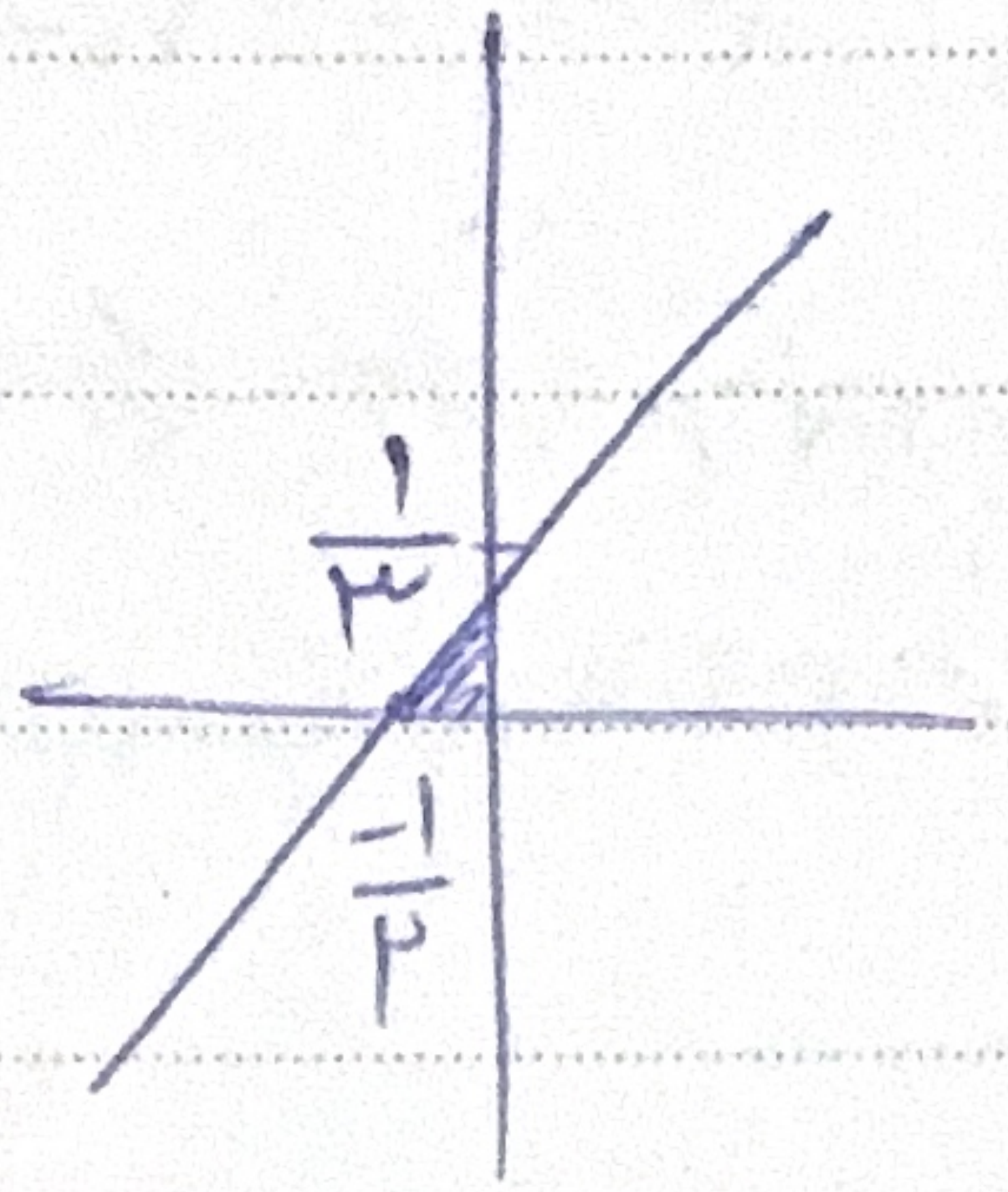
ثنا امیرقاسمی

سوال ۱ وارون: $y = \frac{2x+1}{3}$

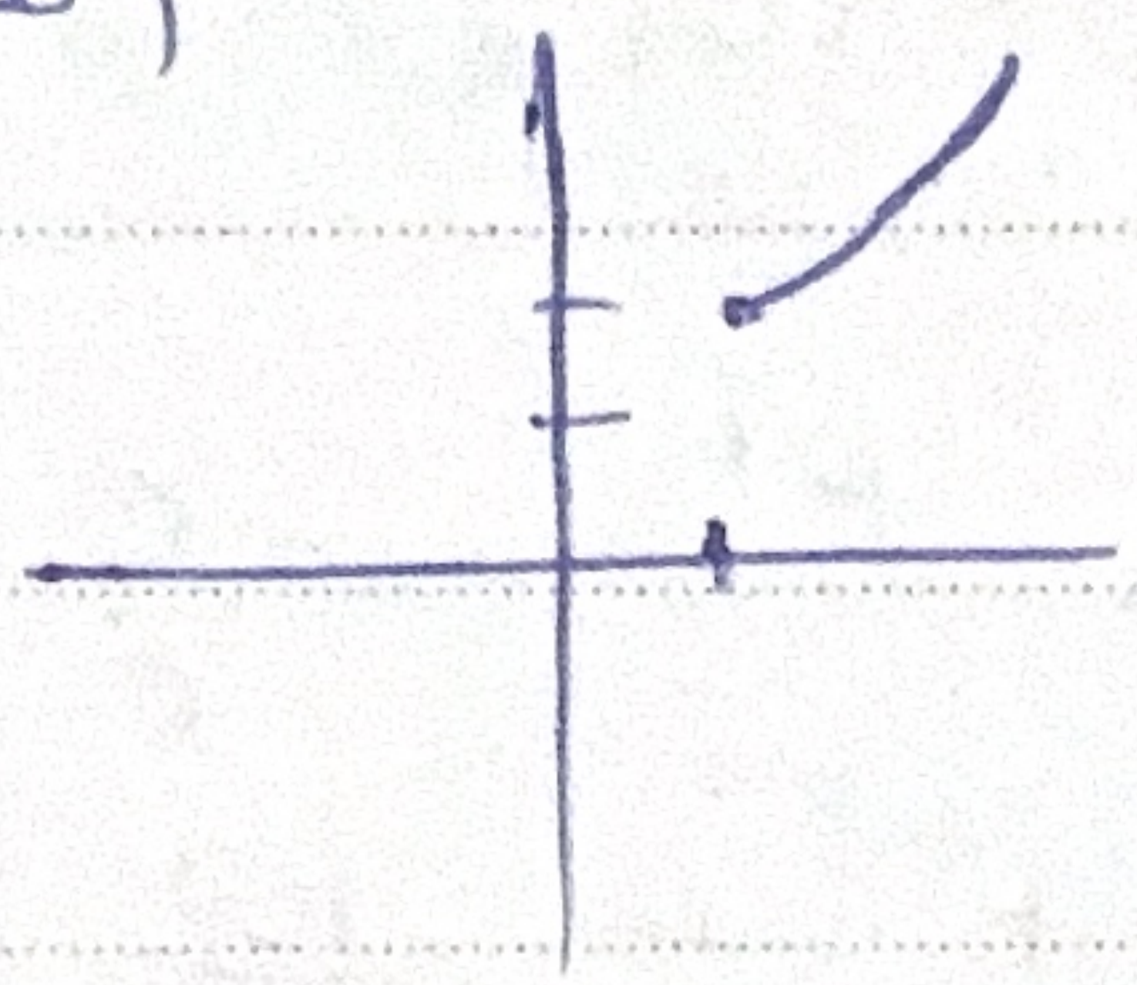
$2y = 3x - 1 \longrightarrow 2x = 3y - 1 \longrightarrow$

$f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$



$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

سوال ۲ یک به یک است.



الف) $y = x^2 - 2x + 3$ $\quad D_f = [2 \; +\infty)$

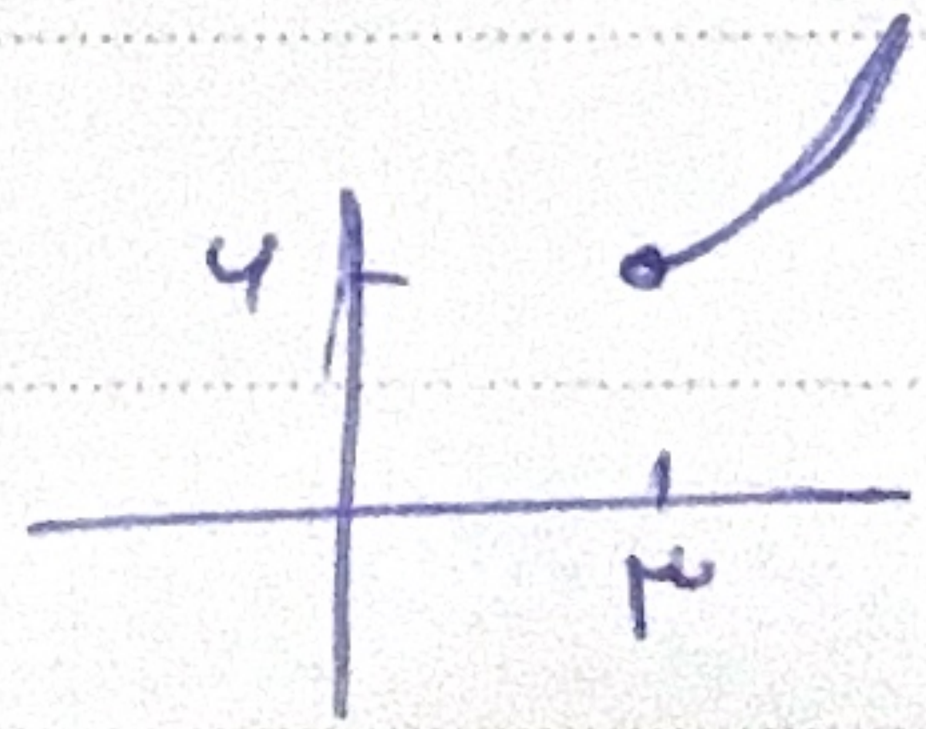
$y = (x-1)^2 + 2$

$y - 2 = (x-1)^2$

$\sqrt{y-2} = |x-1| \xrightarrow{D_f = [1 \; +\infty)} x - 1 = \sqrt{y-2} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

$R_{f(x)} = D_{f^{-1}(x)} = [2 \; +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3$ $\quad D_g = [3 \; +\infty)$



$y = (x-1)^2 + 2 \rightarrow \sqrt{y-2} = |x-1|$

$\underrightarrow{D_g = [3 \; +\infty)} \sqrt{y-2} = x - 1 \rightarrow g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

$R_{6}\,g(x)$

$D_{g^{-1}} = [6 \; +\infty)$

Date: Sub:

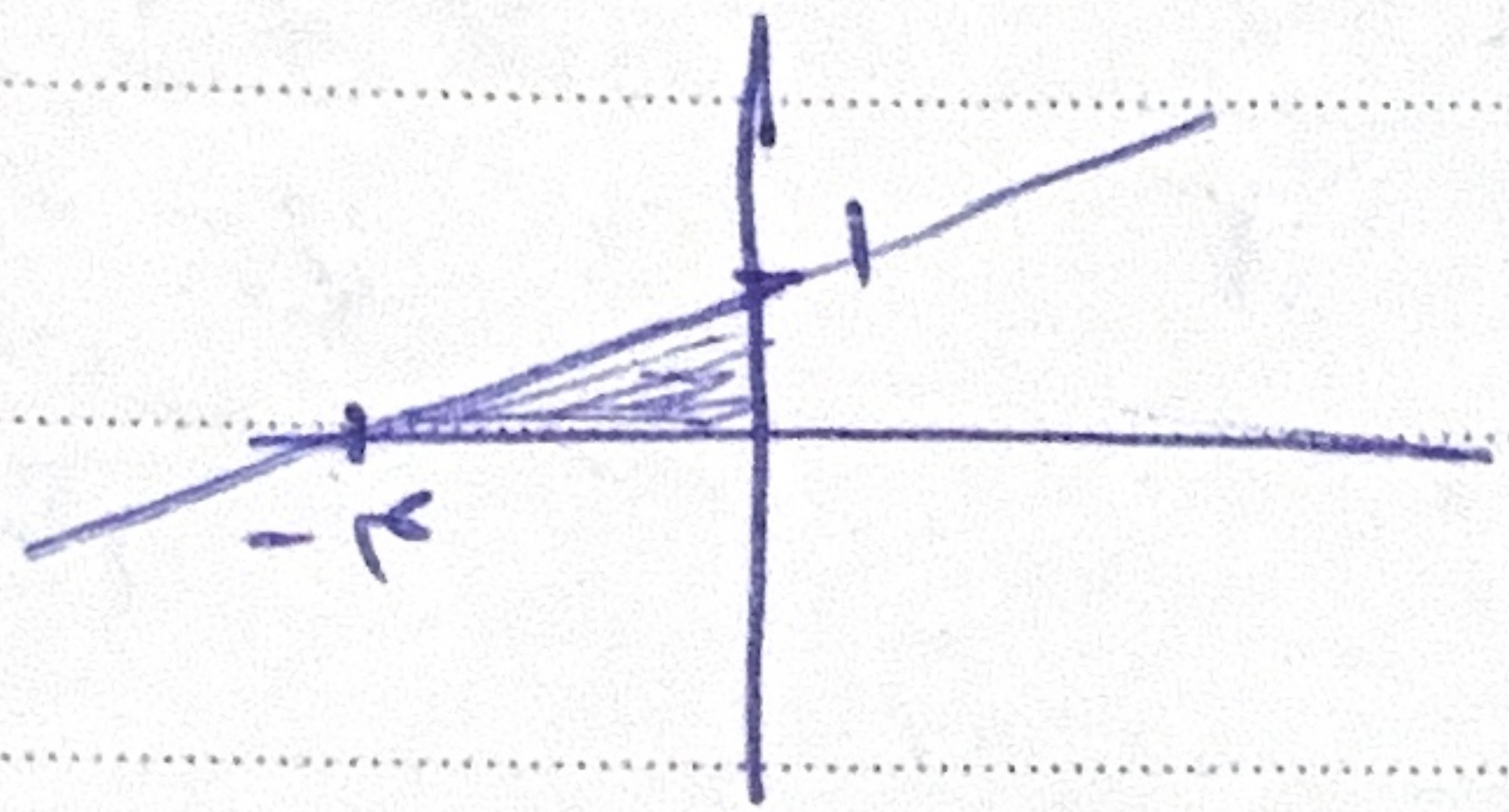
سوال ۳

$f(x) = ۲x - \sqrt{۱۶ - ۴x(۴ - x)} = ۲x - \sqrt{(۲x-۴)^۲}$

$= ۲x - |۲x - ۴| \xrightarrow{x \geq ۲} +۴$ وارون پذیر نیست

$\xrightarrow{x \leq ۲} ۴x - ۴$ در این بازه وارون پذیر است

$y = ۴x - ۴ \rightarrow (y + ۴)\frac{۱}{۴} = x \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۴}(x) + ۱$



$S = ۴ \times ۱ \times \frac{۱}{۲} = ۲$

سوال ۴

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \Rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}}$

$\rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5} \rightarrow x_1^2 x_2^2 - 5x_1^2 = x_2^2 x_1^2 - 5x_2^2$

$\rightarrow x_1 = \pm x_2$ ولی همواره x و y هم علامت اند بنابراین $x_2 = x_1$

و یک به یک است.

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2 = \frac{x^2}{x^2-5} \rightarrow y^2x^2 - 5y^2 = x^2$

$\rightarrow x^2(y^2-1) = 5y^2 \rightarrow x^2 = \frac{5y^2}{y^2-1} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}}$

$x = \sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}}$ که علامت منفی غ ق ق است چون x و y هم علامت اند

$\hookrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}$ $D_{f^{-1}} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

سوال ۵

$$g(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴x + k & x \geq ۲ \\ x_s = ۲ & \\ x_s = ۲ & \\ -x^۲ + ۶x + ۳k & x < ۲ \end{cases}$$

$x = ۲ \to y = ۴ - ۸ + k = k - ۴$

$x = ۲ \to y = -۴ + ۱۲ + ۳k = ۸ + ۳k$

$۸ + ۳k \leq k - ۴ \to ۲k \leq -۱۲ \to k \leq -۶$

سوال ۶

$$f(x) = \begin{cases} ۴x & x \geq ۰ \\ ۲x & x \leq ۰ \end{cases}$$

$y = ۴x \to f^{-1}(x) = \frac{x}{۴}$

$y = ۲x \to f^{-1}(x) = \frac{x}{۲}$

$\cancel{\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴})\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۸} \quad |\frac{۱}{۴} - \frac{۳}{۸}| = \frac{۱}{۸} \to \underbrace{\frac{۱}{۸}}_{a}x + \underbrace{\frac{۳}{۸}}_{b}|x| = f^{-1}(x)$

$ab = \frac{۳}{۶۴}$

سوال ۷

$f(x)=\frac{۳x+۴}{x+m} \xrightarrow{(۲,-۱۰)} \frac{\overset{۱۰}{\cancel{۶+۴}}}{۲+m}=\overset{-۱}{\cancel{-۱۰}} \to -۲-m=۱ \to m=-۳$

$y=\overset{x}{\cancel{f\circ f^{-1}(x)}}+f^{-1}(x) \to y=\cancel{x}+\frac{۳x+۴}{x-۳}=\cancel{x} \to \frac{۳x+۴}{x-۳}=۰$

$f(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳} \to f^{-1}(x)=-\frac{-۳x-۴}{x-۳}=\frac{۳x+۴}{x-۳}$

$\downarrow$

$۳x+۴=۰$

$\downarrow$

$x=\frac{-۴}{۳}$

سوال ۸

$f(۳-۲x)=۲-g(\frac{x}{۲})$ $\quad ۴g^{-1}(۴)+f^{-1}(-۲)=?$

$g^{-1}(۴)=t \to g(t)=۴ \to \frac{x}{۲}=t \to x=۲t$

$f(۳-۴t)=۲-g(\frac{۲t}{۲}) \to f(۳-۴t)=-۲ \to f^{-1}(-۲)=۳-۴t$

$۴t+۳-۴t=\underline{\underline{۳}}$

سوال ۹

$y=\frac{۵x-۱۳}{۱-x} \xrightarrow{\text{قرینه به مبدأ}} -y=\frac{-۵x-۱۳}{x+۱} \Rightarrow y=\frac{۵x+۱۳}{x+۱}$

$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} \frac{۵(x-۲)+۱۳}{(x-۲)+۱}=\frac{۵x+۳}{x-۱} \xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}} \frac{۵x+۳}{x-۱}-۳$

$=\frac{۵x+۳-۳x+۳}{x-۱}=\frac{۲x+۶}{x-۱}=f(x) \to f^{-1}(x)=\frac{-(-x-۶)}{x-۲}=\frac{x+۶}{x-۲}$

$\frac{x+۶}{x-۲}=\frac{۲x+۶}{x-۱} \to x^۲+۵x-۶=۲x^۲\underbrace{-۴x+۶x}_{۲x}-۱۲$

$\to x^۲-۳x-۶=۰$ مجموع طول نقاط $\to \underline{\underline{+۳}}$

سوال ۱۰

$y=x+۴[x] \xrightarrow{\text{براکت از ۲ طرف}} [y]=۵[x]$

قرینه به $x=y$ $\quad x=y+۴[y]=y+۴(۵[x])=y+۲۰[x]=x$

$\to g(x)=x-۲۰[x]$ $\quad (f-g)(x)=x+۴[x]-x+۲۰[x]$

$=۲۴[x]$