تکلیف شماره ی ۱۰

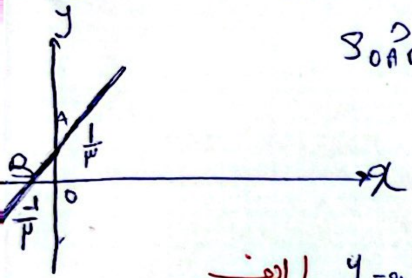
بسم خدا

هستی ...
دوازدهم دختر B

(۱)

$2y = 3x - 1 \Rightarrow 2y + 1 = 3x \Rightarrow x = \frac{2y+1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}$

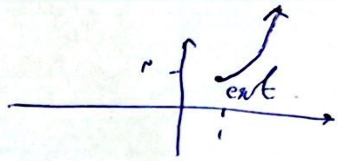
$f(x) = 2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \quad , \quad f^{-1}(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$



$S_{OAB} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

(۲)

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad , \quad x \in [1, +\infty)$



تابع یک به یک است ← وارون دارد:

$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \Rightarrow$

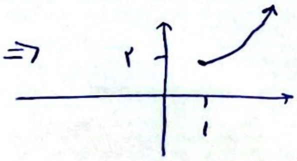
$(x-1) = \pm\sqrt{y-2} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{y-2} \Rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

مقدار منفی غیرقابل قبول ×

$D_{f^{-1}(x)} = R_f = [2, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \quad , \quad x \in [3, +\infty) \Rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow$

$S_x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow$



تابع یک به یک هست

$\sqrt{y-2} = x - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$ ✓

$D_{f^{-1}(x)} = [2, +\infty)$

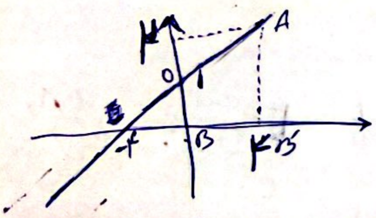
(۳)

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = 2x - \sqrt{(2x-4)^2} = 2x - |2x-4|$

$f(x) = \begin{cases} 4 & x \geq 2 \\ 4x - 4 & x \leq 2 \end{cases}$

$x \geq 2$ → در این بازه یک به یک نیست

$x \leq 2$ → در این بازه یک به یک هست $\Rightarrow f(x) = 4x - 4 \Rightarrow \frac{y+4}{4} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4}$



$S_{OA'B'B} = \frac{(1+2) \times 4}{2} = 6$ آخر

$R_f = D_{f^{-1}} = x \leq 4$

۴

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \Rightarrow y\sqrt{x^2-5} = x \Rightarrow y^2(x^2-5) = x^2$$

$$y^2x^2 - 5y^2 = x^2 \Rightarrow 5y^2 = x^2(y^2-1)$$

$$\Longrightarrow x^2 = \frac{5y^2}{y^2-1} \Longrightarrow x = +\frac{y\sqrt{5}}{\sqrt{y^2-1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-1}}$$

فقط مقدار + قابل قبول است زیرا x و y هم علامت اند

---

۴ بررسی یک به یک بودن تابع :

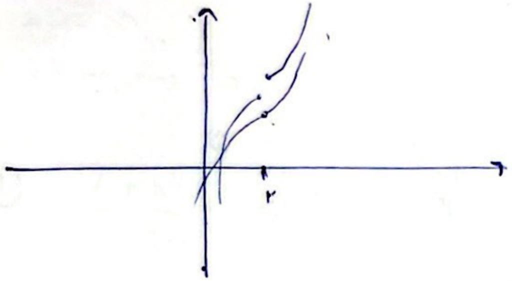
$$\text{if } \begin{matrix}(x_1, y)\\(x_2, y)\end{matrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow y = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \xRightarrow{(\ )^2}$$

$$\frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5} \Rightarrow x_1^2x_2^2 - 5x_1^2 = x_1^2x_2^2 - 5x_2^2 \Rightarrow$$

$$5x_1^2 = 5x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

مقدار منفی غیر قابل قبول زیرا x_1 و x_2 هم علامت اند.

تابع یک به یک هست.



⑤

$$g(x)=\begin{cases} x^2-4x+k & x\geq 2 \\ -x^2+4x+3k & x<2 \end{cases}$$

رأس سهمی ها در $x=\frac{-b}{2a}=2$

$$x=2 \Rightarrow -4+12+3k \leq 4-8+k \Rightarrow$$

$$3k+8 \leq k-4 \Rightarrow 2k \leq -12 \Rightarrow$$

$$\boxed{k \leq -6}$$

---

⑥

$$f(x)=3x+|x| \longrightarrow f(x)=\begin{cases} 4x & x\geq 0 \\ 2x & x<0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x}{4} & x\geq 0 \\ \frac{x}{2} & x<0 \end{cases}$$

$$a=\frac{\frac{x}{4}+\frac{x}{2}}{2}=\frac{3x}{8} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x}{8}-|x|\frac{1}{8} \longleftrightarrow f^{-1}(x)=g(x)=ax+b|x|$$

$$\Downarrow$$

$$a=\frac{3}{8},\ b=\frac{-1}{8} \Rightarrow ab=\frac{-3}{64}$$

---

⑦

$$f(x)=\frac{3x+4}{x+m} \Rightarrow \frac{10}{2+m}=-10 \Rightarrow -m-2=1,\ -m=3 \Rightarrow \boxed{m=-3} \Bigg\} \rightarrow f(x)=\frac{3x+4}{x-3} \Rightarrow$$

$(2,-10)$

$$a+d=0 \Rightarrow f^{-1}(x)=f(x)=\frac{3x+4}{x-3}$$

$$y=\underbrace{f\circ f^{-1}(x)}_{x}+f^{-1}(x)=x \Rightarrow f^{-1}(x)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{3x+4}{x-3}=0 \Rightarrow x=\frac{-4}{3}$$

البته منطق دامنه f^{-1} یعنی برد f

۸

$$f(۳-۲x) = ۲ - g\left(\frac{x}{۲}\right)$$

$$۴g^{-1}(۴) + f^{-1}(-۲) = ?$$

$$g^{-1}(۴) = t \Rightarrow g(t) = ۴$$

$$g\left(\frac{۲t}{۲}\right) = ۴ \Big\} \Rightarrow x = ۲t$$

$$f(۳-۲x) = ۲ - g(t) = ۲ - ۴ = -۲$$

$$f(۳-۲(۲t)) = -۲ \Rightarrow f(۳-۴t) = -۲$$

$$۴t + ۳ - ۴t = ۳$$

حاضر

۹

$$y=\frac{5x-13}{1-x} \xRightarrow[y\to -y]{x\to -x} y=-\frac{-5x-13}{x+1}=\frac{5x+13}{x+1} \xrightarrow[x\to x-2]{\text{دو واحد به راست}}$$

$$y'=\frac{5(x-2)+13}{(x-2)+1}=\frac{5x+3}{x-1} \xRightarrow{\text{۳ واحد پایین}} y''=\frac{5x+3}{x-1}-3=\frac{5x+3-3x+3}{x-1}=\frac{2x+6}{x-1}=f(x)$$

معکوس $x=\frac{y+6}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+6}{x-2} \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{2x+6}{x-1}=\frac{x+6}{x-2} \Rightarrow$

$$2x^2-4x+6x-12=x^2+5x-6 \Rightarrow x^2-3x-6=0 \Rightarrow S=\frac{-b}{a}=3$$

۱۰

$$y=f(x)=x+4[x]$$ قرینه نسبت به خط $y=x$ $\Rightarrow$ همان وارون تابع $=g(x)$ به شرط اینکه یک به یک بودن

$(f-g)(x)=?$

~~از دو طرف جزء صحیح میگیریم~~ $[y]=[x+\underbrace{4[x]}_{\text{عدد صحیح}}]=[x]+4[x]=5[x]$

$$y=x+4[x] \xRightarrow{[x]=\frac{[y]}{5}} y=x+4\frac{[y]}{5} \Rightarrow x=y-4\frac{[y]}{5} \Rightarrow f^{-1}(x)=x-\frac{4[x]}{5}=g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\cancel{x}+4[x]-\cancel{x}+\frac{4}{5}[x]=4{,}8[x]$$