۱۹ آفرین

با عرض معذرت به اشتباه سوال ۳ و ۴ جابجا نوشته شده !!

ok!

نام و نام خانوادگی ....مریم معصومی.... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..۱۰.. کلاس ..دوازدهم B..

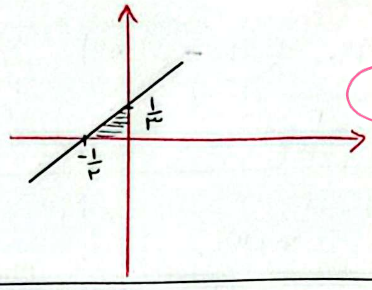
۱ ضابطه تابع معکوس

$2y = 3x - 1 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} 2x = 3y - 1 \to \frac{2x+1}{3} = y \to \boxed{\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = y}$

عرض از مبدا

$f(0) = \frac{1}{3}$ (عرض)

$\to \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \to \frac{2}{3}x = -\frac{1}{3} \to x = -\frac{1}{2}$ (طول از مبدا)



$S_{\text{مثلث}} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{12}}$

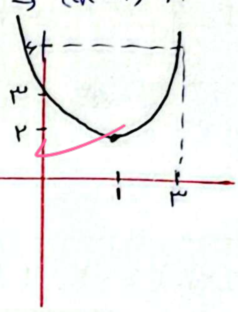
۲

۲

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [1, +\infty) \longrightarrow x^2 - 2x + 3 - 2 + 2 \to (x-1)^2 + 2$

$x = (y-1)^2 + 2 \to \sqrt{x-2} + 1 = y$ $\quad R_f = D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

$f(1) = 2$



ب) طبق الف $y = \sqrt{x-2} + 1$

$x^2 - 2x + 3 \quad x \in [3, +\infty) \to f(3) = 6 \to R_f = D_{f^{-1}} = [6, +\infty)$

۲

۴

① x و y باهم هم علامتند

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \to x = \frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \to x\sqrt{y^2-5} = y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2(y^2-5) = y^2$

$x^2y^2 - 5x^2 = y^2 \to x^2y^2 - y^2 = 5x^2 \to y^2(x^2-1) = 5x^2 \to y^2 = \frac{5x^2}{x^2-1}$

* تابع یک به یک است.

$y = \pm\sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}} \to y = \frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$ → x و y هم علامت پس + را می خواهیم.

$f(x_1) = f(x_2) \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5}$

$x_1^2x_2^2 - 5x_1^2 = x_1^2x_2^2 - 5x_2^2$

$x_1^2 = x_2^2 \to x_1 = \pm x_2$

یک لا نمی تواند دو x مختلف العلامت داشته باشد پس $x_1 = x_2$

۲

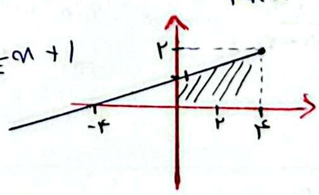
۳

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} \to 2x - \sqrt{4x^2 - 16x + 16} \to 2x - \sqrt{4(x^2 - 4x + 4)} =$

$2x - 2\sqrt{(x-2)^2} = 2x - 2|x-2| = 2x - |2x-4|$

	۲	
$4x-4$		4

$y = 4x - 4 \quad x < 2 \to x = 4y - 4 \quad \frac{x+4}{4} = \frac{1}{4}x + 1$



$S = \frac{(1+2) \times 4}{2} = \boxed{6}$

با تابع ثابت یک به یک نیست و معکوس ندارد

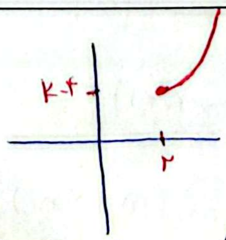
۲

۵

$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + k & x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3k & x < 2 \end{cases}$

$x = 2 \to 4 - 8 + k$

$x = 2 \to -4 + 12 + 3k = 8 + 3k$



برای اینکه ضابطه ی تابع مقابل یک به یک باشد باید تابع پایینی به ازای $x=2$ از تابع بالایی به ازای $x=2$ کمتر باشد.

$8 + 3k \leq k - 4$

$12 \leq -2k \to \boxed{k \leq -6}$

۲

$f(x) = ۳x + |x|$

$g(x) = ax + b|x|$

$\rightarrow x>۰ \rightarrow ۴x = y \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{معکوس}} y = \frac{۱}{۴}x \rightarrow ۲x \rightarrow x>۰$ $\qquad a = \dfrac{\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲}}{۲} = \dfrac{۳}{۸}$ ② ۶

$x<۰ \rightarrow ۲x = y \xrightarrow[\text{''}]{\text{''}} y = \frac{۱}{۲}x \rightarrow x<۰$

$g(x) = \frac{۳}{۸}x + \frac{۱}{۸}|x|$ $\quad \xrightarrow{x>۰} \frac{۲}{۸}x = \frac{۱}{۴}x \checkmark$ $\qquad b = \dfrac{\left|\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}\right|}{۲} = \dfrac{۱}{۸}$

$\boxed{a \times b = \frac{۳}{۶۴}}$ $\quad \xrightarrow{x<۰} \frac{۴}{۸}x = \frac{۱}{۲}x \checkmark$ $\qquad b = \pm\frac{۱}{۸}$ قق

$f(x) = \dfrac{۳x+۴}{x+m} \rightarrow f(۲) = -۱۰ \rightarrow -۱۰ = \dfrac{۶+۴}{۲+m} \Rightarrow m = -۳ \qquad f(x) = \dfrac{۳x+۴}{x-۳}$

چون a و d قرینه‌اند بین معکوس تابع با خود تابع برابر است. $f(x) = f^{-1}(x)$

$y = f \circ f^{-1}(x) + f^{-1}(x) = x + f(x) = \cancel{x} + \dfrac{۳x+۴}{x-۳} = \cancel{x}$ نیمساز ناحیه اول و سوم ۷

$\dfrac{۳x+۴}{x-۳} = ۰ \qquad x = -\dfrac{۴}{۳}$ ②

$f(۳-۲x) = \underbrace{\dfrac{۲-g(\frac{x}{۲})}{-۲}} \rightarrow f^{-1}(-۲) = ۳-۲x \rightarrow x = \dfrac{۳ - f^{-1}(-۲)}{۲}$ ①

مثلا

$۲ - g(\frac{x}{۲}) = -۲ \rightarrow g(\frac{x}{۲}) = ۴ \rightarrow g^{-1}(۴) = \frac{x}{۲} \rightarrow x = ۲g^{-1}(۴)$ ۸

$۲g^{-1}(۴) = \dfrac{۳ - f^{-1}(-۲)}{۲} \rightarrow ۴g^{-1}(۴) + f^{-1}(-۲) = \boxed{۳}$ ②

$y = \dfrac{۵x - ۱۳}{۱-x} \xrightarrow[\text{مختصات}]{\text{قرینه به مبدا}} y = -\left(\dfrac{-۵x-۱۳}{۱+x}\right) = y = \dfrac{۵x+۱۳}{x+۱} \xrightarrow{\text{دو واحد راست}} \dfrac{۵(x-۲)+۱۳}{x-۲+۱}$

$y = \dfrac{۵x+۳}{x-۱} - ۳ \rightarrow \dfrac{۵x - ۳x + ۶}{x-۱} = \dfrac{۲x+۶}{x-۱} = f(x) \qquad f^{-1}(x) = \dfrac{x+۶}{x-۲}$ ②

$\dfrac{۲x+۶}{x-۱} = \dfrac{x+۶}{x-۲} \longrightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۶x - ۱۲ = x^۲ + ۵x - ۶$ ۹

$x^۲ - ۳x - ۶ = ۰ \xrightarrow[\text{نقاط برخورد}]{\text{مجموع طول}} -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-۳)}{۱} = \boxed{۳}$

$f(x) = x + ۴[x] \quad [y] = ۵[x] \rightarrow [x] = \dfrac{[y]}{۵}$ صحیح $\quad [x]$ عددی است

$x \in [n, n+1) \Rightarrow f(x) = x + ۴n \rightarrow y = x + ۴n \qquad x = y - ۴n$

$f^{-1}(x) = x - \frac{۴}{۵}[x] \rightarrow f^{-1}(x) = x - ۰.۸[x] \qquad y^{-1} = x - ۴n$ ①

$y - y^{-1} = (x + ۴n) - (x - ۴n) = ۸n$ ۱۰

$\downarrow$

$f - g = x + ۴[x] - x + ۰.۸[x] = ۴.۸[x]$

$f(x) - g(x) = ۸[x]$