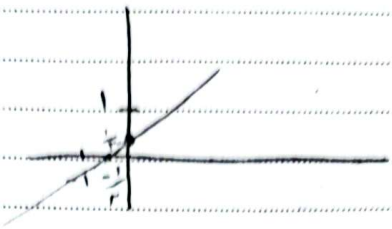
۱) $2y = 3x - 1 \Rightarrow 2y + 1 = 3x \Rightarrow$

$x = \frac{2y+1}{3}$ $\quad y = \frac{2x+1}{3}$

x	0	$-\frac{1}{2}$
y	$\frac{1}{3}$	0

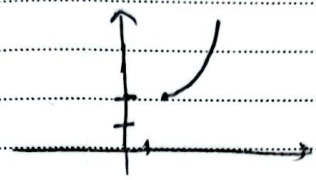


$S_\Delta = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{12}$

---

۲) الف) $y = x^2 - 2x + 3$ $\quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ $\quad y = 2$

کلیه یک به یک ✓



$x_1^2 - 2x_1 + 3 = x_2^2 - 2x_2 + 3$

$y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y-2} = x - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-2} + 1$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

$1 = \sqrt{x-2} + 1 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 0$

$x = 2$ $\quad D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

ب) کلیه یک به یک است

$\sqrt{x-2} + 1 = 3$

$\sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 4$

$x = 6$

ضابطه f^{-1} دارون: $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

$D_{f^{-1}} = [4, +\infty)$

---

۳) $f(x) = 2x - \sqrt{14 - 14x + 4x^2} = 2x - \sqrt{4(x^2 - 4x + 4)}$

$= 2x - 2\sqrt{(x-2)^2}$

$= 2x - 2|x-2|$

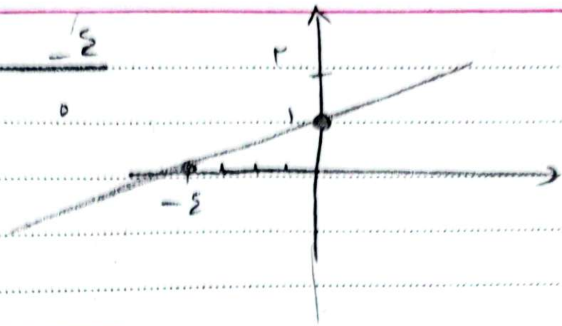
$x \geq 2$ $\quad 2x - 2x + 4$

$x < 2$ $\quad 2x + 2x - 4 = 4x - 4$ وارون پذیر

$y = 4x - 4$ $\quad y + 4 = 4x \Rightarrow x = \frac{y+4}{4}$ $\quad y = \frac{x+4}{4}$

$R_y = (-\infty, 2)$

x	۰	-۴
y	۱	۰



$S = \frac{۱ \times ۴}{۲} = ۲$

---

۴) $y = \frac{x}{\sqrt{x^۲ - ۵}} \Rightarrow$ $f(x_۱) = f(x_۲)$, $y_۱ = y_۲$ $\quad \frac{x_۱}{\sqrt{x_۱^۲ - ۵}} = \frac{x_۲}{\sqrt{x_۲^۲ - ۵}}$

$\frac{x_۱^۲}{x_۱^۲ - ۵} = \frac{x_۲^۲}{x_۲^۲ - ۵} \Rightarrow x_۱^۲ x_۲^۲ - ۵x_۱^۲ = x_۲^۲ x_۱^۲ - ۵x_۲^۲$

$x_۱ = \pm x_۲$ نمی‌توانند x و x مختلف‌العلامت داشته باشند (؟) محدوده داشته است $\Leftarrow x_۱ = x_۲ \Rightarrow$ تابع یک به یک است. (از روی خطا به توان ۲ رساندم)

f^{-1}: $y = \frac{x}{\sqrt{x^۲ - ۵}} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^۲ - ۵}} \Rightarrow x^۲ = \frac{y^۲}{y^۲ - ۵} \Rightarrow y^۲x^۲ - ۵x^۲ = y^۲ \Rightarrow y^۲x^۲ - y^۲ = ۵x^۲$

$\Rightarrow y^۲ = \frac{۵x^۲}{x^۲ - ۱} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{۵x^۲}{x^۲ - ۱}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۵}\, x}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$ x و y هم علامت هستند $\Leftarrow$ پس نیازی به علامت $\pm$ نیست

---

۵)

---

۶) $y = ۳x + |x|$

$x \geq ۰ \quad ۴x \quad y = ۴x \Rightarrow x = \frac{y}{۴} \quad y = \frac{x}{۴}$

$x < ۰ \quad ۲x \quad y = ۲x \Rightarrow x = \frac{y}{۲} \quad y = \frac{x}{۲}$

۱۷) $\frac{-۱۰}{-۱} = \frac{۴+٤\ ۱۰}{۲+m} \rightarrow -۲-m=۱$

$\boxed{-۱=m}$

$y=\frac{۳x+٤}{x-۱} \Rightarrow yx-y=۳x+٤ \Longrightarrow yx-۳x=٤+y \Rightarrow$

$x(y-۳)=٤+y \Rightarrow x=\frac{٤+y}{y-۳} \qquad f^{-۱}(x)=\frac{٤+x}{x-۳}$

$f\left(\frac{٤+x}{x-۳}\right)=\frac{۳\left(\frac{٤+x}{x-۳}\right)+٤}{\frac{٤+x}{x-۳}-۱}=\frac{\frac{۱۲+۳x+٤x-۱۲}{x-۳}}{\frac{٤+x-x+۳}{x-۳}} \xrightarrow{x\neq ۳}$

$=\frac{۷x}{۷}=x \qquad y=x$

در بی نهایت نقطه قطع می کنند.

۱۸) $\frac{x}{۲}=٤ \Rightarrow x=۸ \qquad f(۳-۱۴)=۲-g(٤)$

۱۹) $y=\frac{-۵x+۱۳}{۱-x}$

قرینه نسبت به محور مختصات (باید یکبار نسبت به محور x و یکبار نسبت به محور y قرینه کنیم)

$y=\frac{۵x+۱۳}{x+۱}$

$y=\frac{۵(x-۲)+۱۳}{x-۲+۱}-۳ \Rightarrow \frac{۵x-۱۰+۱۳}{x-۱}=\frac{۵x+۳}{x-۱}=f(x)$

$y(x)-y=۵x+۳ \Rightarrow x(y-۵)=۳+y \Rightarrow x=\frac{۳+y}{y-۵} \qquad f^{-۱}(x)=\frac{۳+x}{x-۵}$

$\frac{۳+x}{x-۵}=\frac{۵x+۳}{x-۱} \Rightarrow ۳x-۳+x^۲-x=۵x^۲-۲۵x+۳x-۱۵$

سه‌شنبه
دی ماه
۲
۲ رجب ۱۴۴۷
23 Dec 2025

$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 5x^2 - 22x - 15$

$\Rightarrow 4x^2 - 24x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2}$

$= 2 \pm \sqrt{7}$

مجموع $= 2 + \sqrt{7} + 2 - \sqrt{7} = 4$