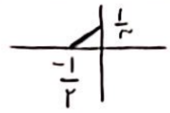
نام: دنیا احمدی   شماره تکلیف: ۱۰   تصحیح: دوازده ذهنان B

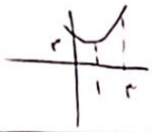
۱)

$2y=3x-1 \to x=\frac{2y+1}{3} \to f^{-1}(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \to$  $\to S=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{12}$

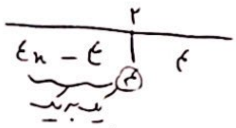
۲)

الف)  $x\in[1,+\infty)$ یک‌به‌یک $\to y=x^2-2x+3 \to y=(x-1)^2+2 \to x-1=\underset{\text{غ ق}}{\pm}\sqrt{y-2}$

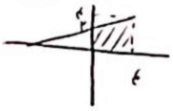
$f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+1 \to D_{f^{-1}}=R_f=[2,+\infty)$

ب)  $x\in[2,+\infty)$ یک‌به‌یک است $\to f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+1 \to D_{f^{-1}}=R_f=[3,+\infty)$

۳)

$y=2x-\sqrt{16-16x+4x^2}=2x-|2x-4| \to$  $\to y=4x-4$

یک‌به‌یک

$\to f^{-1}(x)=\frac{x+4}{4} \to D_{f^{-1}}=(-\infty,4] \to$  $\to S=(\frac{2+4}{2})4=\boxed{12}$

۴)

$f(x_1)=f(x_2) \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \to \frac{x_1^2}{x_1^2-5}=\frac{x_2^2}{x_2^2-5} \to x_1^2=x_2^2 \to x_1=\pm x_2$

y نمی‌تواند دو علامت مختلف داشته باشد و خطای بوجود آمده بر خاطر به‌توان دو رساندن است پس $f(x)$ یک‌به‌یک است.

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \to y^2=\frac{x^2}{x^2-5} \to y^2x^2-x^2=5y^2 \to x^2=\frac{5y^2}{y^2-1} \to x=\underset{\text{غ ق}}{\pm}\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}} \to f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{x^2-1}}$

۵)

$\begin{cases} x^2-4x+k \xrightarrow{x\geq 2} \min|^{2}_{y} \\ -x^2+6x+2k \to x<2 \end{cases} \to \begin{cases} (x-2)^2+(\cancel{8+}k-4) \to y\in[k-4,+\infty) \\ -(x-3)^2+(9+2k) \xrightarrow{x<2} y\in(-\infty,8+2k) \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{یک‌به‌یک}} 8+2k \leq k-4 \to k\leq -6$

۶)

$\begin{cases} 2x & x\leq 0 \\ 4x & x>0 \end{cases} \to f^{-1}(x)\begin{cases} \frac{1}{2}x & x\leq 0 \\ \frac{1}{4}x & x<0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-1 \to f(-1)=-2 \\ x=1 \to f(1)=4 \end{cases} \to (4,1),(-2,-1)\in f^{-1}$

$g(x)=ax+b|x| \to \begin{cases} 4a+4b=1 \\ -2a+2b=-1 \end{cases} \to b=\frac{-1}{8} \quad a=\frac{3}{8} \to ab=\boxed{\frac{-3}{64}}$

۷)

$\xrightarrow{|^{2}_{-10}} -10=\frac{10}{2+m} \to m=-3 \to f(x)=\frac{2x+4}{x-3} \to f^{-1}(x)=\frac{-(-3x-4)}{x-2}=\frac{3x+4}{x-2}$

$fof^{-1}(x)=x \to y=x+\frac{2x+4}{x-2} \xrightarrow[\text{اول و سوم}]{\text{برخورد با نیمساز ناحیه}} x+\frac{2x+4}{x-2}=x \to 2x+4=0 \to x=\boxed{\frac{-4}{2}}$

۸)

$\left.\begin{matrix} g^{-1}(4)=a \to g(a)=4 \\ f^{-1}(-2)=b \to f(b)=-2 \end{matrix}\right\} \to f(\underbrace{2-2x}_{b})=2-g(\underbrace{\tfrac{x}{2}}_{a}) \to f(b)=2-g(x)$

$f(a)+b=4(\frac{x}{2})+2-2x=\boxed{2}$

۹

$$(x,y) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدا}} (-x,-y) \rightarrow g(x) = -h(-x)$$

$$h(x) = \frac{5x-12}{1-x} \rightarrow g(x) = \frac{5x+12}{1+x} \rightarrow f(x) = \frac{5(x-2)+12}{1+(x-2)} - 2 \rightarrow y = \frac{3x+4}{x-1}$$

$$\rightarrow x = \frac{-(-y-4)}{y-3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{x-3} \Longrightarrow f^{-1}(x) = f(x) \rightarrow \frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+4}{x-3} \rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} \rightarrow x_1 + x_2 = \boxed{4}$$

۱۰

$$y = x + 4[x] \rightarrow x = y + 4[x] \rightarrow y = x - 4[y] \Longrightarrow [x] = [y + 4[y]] \rightarrow [x] = 5[y]$$

$$f^{-1}(x) = x - 4[y] = x - 4\left(\frac{[x]}{5}\right) = x - \frac{4}{5}[x] = g(x)$$

$$f(x) - g(x) = x - 4[x] - x + \frac{4}{5}[x] = \frac{24}{5}[x]$$