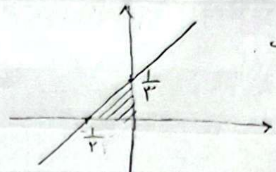
مبینا جعفری پور   تکلیف ۱۰   دوازدهم دختر B

1 $2y=3x-1 \Rightarrow \frac{2y+1}{3}=x \longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$



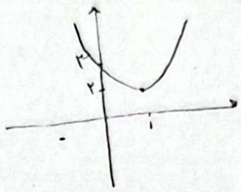
$S=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{2}=\boxed{\frac{1}{12}}$

---

2 الف) $y=x^2-2x+3 \quad x\in[1,+\infty)$ $\quad x_{راس}=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$ چون دامنه از راس است تابع صعودی اکید و وارون پذیر

تابع معکوس: $y=(x-1)^2+2 \Rightarrow y-2=(x-1)^2 \Rightarrow x-1=\pm\sqrt{y-2} \xrightarrow[\text{همواره مثبت است}]{\text{با توجه به دامنه علامت مثبت}} x-1=+\sqrt{y-2} \Rightarrow x=\sqrt{y-2}+1 \Rightarrow \underline{f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+1}$

$R_f: x=1 \Rightarrow y=1-2(1)+3=2 \xrightarrow{\text{صعودی اکید}} R_f:[2,+\infty) \Rightarrow \underline{D_{f^{-1}}=[2,+\infty)}$



ب) $y=x^2-2x+3 \quad x\in[3,+\infty)$ $\quad x_{راس}=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1 \Longrightarrow$ دامنه سمت راست راس است پس وارون پذیر

معکوس: $y=(x-1)^2+2 \Rightarrow y-2=(x-1)^2 \Rightarrow x-1=\pm\sqrt{y-2} \Rightarrow x-1=\sqrt{y-2} \Rightarrow x=\sqrt{y-2}+1$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+1$

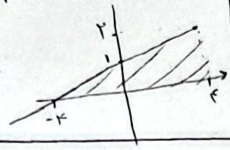
$R_f: f(3)=6 \Rightarrow R_f:[6,+\infty) \Longrightarrow \underline{D_{f^{-1}}=[6,+\infty)}$

---

3 $f(x)=2x-\sqrt{16-4x(4-x)}=2x-\sqrt{4x^2-16x+16}=2x-|2x-4| \Rightarrow \begin{cases}4 & x\geq2\\ 4x-4 & x<2\end{cases} \Rightarrow$ صعودی است $\Rightarrow$ وارون پذیر $\Rightarrow R_f:(-\infty,4]$

$y=4x-4 \Rightarrow x=\frac{1}{4}y+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+1$

$D_{f^{-1}}=R_f=(-\infty,4]$



$S=\frac{2\times8}{2}=\boxed{8}$

---

4 $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$ $\quad \begin{cases}(x_1,y_1)\\(x_2,y_2)\end{cases}$ if $y_1=y_2 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow x_1\sqrt{x_2^2-5}=x_2\sqrt{x_1^2-5} \Rightarrow x_1^2(x_2^2-5)=x_2^2(x_1^2-5)$

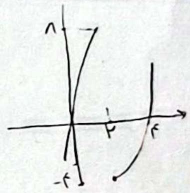
$\Rightarrow \cancel{x_1^2x_2^2}-5x_1^2=\cancel{x_2^2x_1^2}-5x_2^2 \Rightarrow 5x_1^2=5x_2^2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2 \longrightarrow y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$ همواره + پس x و y هم علامت اند $\Rightarrow$ x,y هم علامت $\Rightarrow x_1=x_2$ وارون پذیر

تابع معکوس: $y^2=\frac{x^2}{x^2-5} \Rightarrow y^2x^2-5y^2=x^2 \Rightarrow y^2x^2-x^2=5y^2 \Rightarrow x^2=\frac{5y^2}{y^2-1} \Rightarrow x=\frac{\pm\sqrt{5}\,y}{\sqrt{y^2-1}} \xrightarrow[\text{هم علامت}]{x,y} \boxed{x=\frac{\sqrt{5}\,y}{\sqrt{y^2-1}}}$

---

5 $g(x)=\begin{cases}x^2-4x+k & ;x\geq2 \longrightarrow x_{راس}=\frac{-b}{2a}=2\\ -x^2+6x+3k & ;x<2 \longrightarrow x_{راس}=\frac{-b}{2a}=3\end{cases}$ چون هر دو یک طرف راس هستند در ضابطه خود یکنوا هستند

بررسی نقطه مرزی: $x=2 \Rightarrow (2)^2-4(2)+k \geq -(2)^2+6(2)+3k \Rightarrow -4+k\geq 8+3k \Rightarrow \underline{-6\geq k}$



---

6 $f(x)=\begin{cases}4x & x\geq0\\ 2x & x<0\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{4} & x\geq0\\ \frac{x}{2} & x<0\end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{8} \Rightarrow \underline{f^{-1}(x)=\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}|x|} \Rightarrow a=\frac{3}{8}, b=\frac{-1}{8} \Rightarrow ab=\frac{-3}{64}$

$y=4x \Rightarrow x=\frac{1}{4}y \quad R_f=D_{f^{-1}}=[0,+\infty)$

$y=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}y \quad R_f=D_{f^{-1}}=(-\infty,0]$

---

7 $f(x)=\frac{3x+4}{x+m} \Rightarrow f(2)=\frac{10}{2+m}=-10 \Rightarrow m=-3 \quad D_f=\mathbb{R}-\{3\} \quad R_f=\mathbb{R}-\{3\}$

$fof^{-1}(x)=x \quad D: D_{f^{-1}}\cap D_f=R_f\cap D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

$f^{-1}(x)=f(x) \Leftarrow a+d=3+(-3)=0$

$fof^{-1}(x)+f^{-1}(x)=x+f(x)=\frac{x^2+4}{x-3} \Longrightarrow \frac{x^2+4}{x-3}=x \Rightarrow x^2+4=x^2-3x \Rightarrow \boxed{x=\frac{-4}{3}}$

---

8 $f(3-2x)=2-g(\frac{x}{2}) \xrightarrow[x=\frac{3-t}{2}]{3-2x=t} f(t)=2-g(\frac{3-t}{4}) \Rightarrow f(x)=2-g(\frac{3-x}{4}) \xrightarrow{2-g(\frac{3-x}{4})=a} g(\frac{3-x}{4})=2-a \to g^{-1}(2-a)=\frac{3-x}{4}$

$\Rightarrow x=3-4g^{-1}(2-a) \Rightarrow f^{-1}(a)=x=3-4g^{-1}(2-a) \Rightarrow f^{-1}(x)=3-4g^{-1}(2-x) \Rightarrow f^{-1}(-2)=3-4g^{-1}(4)$

$4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=4g^{-1}(4)+3-4g^{-1}(4)=\boxed{3}$

---

9 $y=\frac{5x-13}{1-x} \xrightarrow[\text{نسبت به محور}]{\text{قرینه}} y=\frac{+5x+13}{1+x} \xrightarrow[\text{راست}]{\text{۲ واحد}} y=\frac{5(x-2)+13}{1+(x-2)}=\frac{5x+3}{x-1} \xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}} y=\frac{5x+3}{x-1}-3=\frac{2x+6}{x-1}=f(x)$

$f^{-1}(x)=\frac{+x+6}{x-2}$ (a و d را قرینه معکوس می کنیم) $f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{2x+6}{x-1}=\frac{x+6}{x-2} \Rightarrow 2x^2+2x-12=x^2+5x-6 \Rightarrow x^2-3x-6=0 \Rightarrow \boxed{S=3}$

هیچ کدام از ریشه ها ۱ یا ۲ نیستند

۱۵

$$f(x)=x+4[x] \xrightarrow[y=x]{\text{قرینه نسبت به}} f^{-1}(x)$$

$$y=x+4[x] \Rightarrow [y]=[x+4[x]]=[x]+4[x]=5[x] \Rightarrow [x]=\frac{[y]}{5} \quad *$$

خارج می‌شود

$$y=x+4[x] \xrightarrow[*]{\text{جایگذاری}} y=x+\frac{4[y]}{5} \Rightarrow x=y-\frac{4[y]}{5} \Rightarrow f^{-1}(x)=g(x)=x-\frac{4[x]}{5}$$

$$(f-g)(x)=x+4[x]-\left(x-\frac{4[x]}{5}\right)=\boxed{\frac{24[x]}{5}}$$