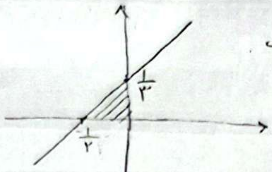
مبینا جعفری پور　　تکلیف ۱۰　　دوازدهم دختر B　　۱۹/۷۵ آفرین

۱
$2y = 3x - 1 \Rightarrow \frac{2y+1}{3} = x \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$



$S = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{2} = \boxed{\frac{1}{12}}$

۲

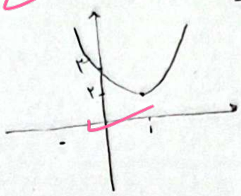
۲
الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [1, +\infty)$　　$x_{رأس} = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ چون دامنه بعد از رأس است تابع صعودی اکید و وارون پذیر

ضابطه معکوس: $y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y-2}$ $\xrightarrow{\text{با توجه به دامنه علامت مثبت}}$ $x - 1 = +\sqrt{y-2} \Rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

$R_f = D_{f^{-1}}$ همواره مثبت است

$R_f: x = 1 \Rightarrow y = 1 - 2(1) + 3 = 2 \xrightarrow{\text{صعودی بودن بازه}} R_f: [2, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [3, +\infty)$　　$x_{رأس} = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Longrightarrow$ دامنه شامل رأس نیست وارون پذیر



معکوس: $y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y-2} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{y-2} \Rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

$R_f: f(3) = 6 \Rightarrow R_f: [6, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = [6, +\infty)$

۲

۳
$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} = 2x - \sqrt{4x^2 - 16x + 16} = 2x - |2x - 4| \Rightarrow \begin{cases} 4 & x \geq 2 \\ 4x - 4 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow$ صعودی اکید $\Leftarrow$ وارون پذیر $\Rightarrow R_f: (-\infty, 4]$

$y = 4x - 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}y + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1$

$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$　مساحت با قسمت ⊕ محور x ها را میخواهد

$S = \frac{2 \times 8}{2} = \boxed{8}$

$S = \frac{4(1+2)}{2} = 6$

۱/۲۵

۴
$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$　$\begin{cases} (x_1, y_1) \\ (x_2, y_2) \end{cases}$　if $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}} \Rightarrow x_1\sqrt{x_2^2 - 5} = x_2\sqrt{x_1^2 - 5} \Rightarrow x_1^2(x_2^2 - 5) = x_2^2(x_1^2 - 5)$

$\Rightarrow x_1^2 x_2^2 - 5x_1^2 = x_2^2 x_1^2 - 5x_2^2 \Rightarrow 5x_1^2 = 5x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \longrightarrow y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$ پس علامت x,y همواره هم علامت اند $\Rightarrow x_1 = x_2$ وارون پذیر

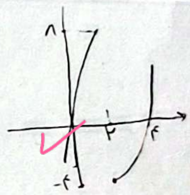
ضابطه معکوس: $y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 5} \Rightarrow y^2 x^2 - 5y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 x^2 - x^2 = 5y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{5y^2}{y^2 - 1} \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{5}\,y}{\sqrt{y^2 - 1}} \xrightarrow{\text{هم علامت}} \boxed{x = \frac{\sqrt{5}\,y}{\sqrt{y^2 - 1}}}$

۲

۵
$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + k & ; x \geq 2 \longrightarrow x_{رأس} = \frac{-b}{2a} = 2 \\ -x^2 + 6x + 3k & ; x < 2 \longrightarrow x_{رأس} = \frac{-b}{2a} = 3 \end{cases}$

چون هر دو در یک طرف رأس هستند در ضابطه خود یکنوا هستند

بررسی نقطه مرزی: $x = 2 \Rightarrow (2)^2 - 4(2) + k \geq -(2)^2 + 6(2) + 3k \Rightarrow -4 + k \geq 8 + 3k \Rightarrow -6 \geq k$



۲

۶
$f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & x \geq 0 \\ \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}|x| \Rightarrow a = \frac{3}{8}, b = \frac{-1}{8} \Rightarrow ab = \frac{-3}{64}$

$y = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}y$　$R_f = D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

$y = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$　$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 0]$

۲

۷
$f(x) = \frac{3x + 4}{x + m} \Rightarrow f(2) = \frac{10}{2 + m} = -10 \Rightarrow m = -3$　　$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$　　$R_f = \mathbb{R} - \{3\}$

$fof^{-1}(x) = x$　$D: D_{f^{-1}} \cap D_f = R_f \cap D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

$f^{-1}(x) = f(x) \Leftarrow a + d = 3 + (-3) = 0$

$fof^{-1}(x) + f^{-1}(x) = x + f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 3} \Rightarrow \frac{x^2 + 4}{x - 3} = x \Rightarrow x^2 + 4 = x^2 - 3x \Rightarrow \boxed{x = \frac{-4}{3}}$

۲

۸
$f(3 - 2x) = 2 - g(\frac{x}{2}) \xrightarrow[x = \frac{3-t}{2}]{3 - 2x = t} f(t) = 2 - g(\frac{3-t}{4}) \Rightarrow f(x) = 2 - g(\frac{3-x}{4}) \xrightarrow{2 - g(\frac{3-x}{4}) = a} g(\frac{3-x}{4}) = 2 - a \Rightarrow g^{-1}(2-a) = \frac{3-x}{4}$

$\Rightarrow x = 3 - 4g^{-1}(2-a) \Rightarrow f^{-1}(a) = x = 3 - 4g^{-1}(2-a) \Rightarrow f^{-1}(x) = 3 - 4g^{-1}(2-x) \Rightarrow f^{-1}(-2) = 3 - 4g^{-1}(4)$

$4g^{-1}(4) + f^{-1}(-2) = 4g^{-1}(4) + 3 - 4g^{-1}(4) = \boxed{3}$

۲

۹
$y = \frac{5x - 13}{1 - x} \xrightarrow[\text{نسبت به مبدا}]{\text{قرینه}} y = \frac{+5x + 13}{1 + x} \xrightarrow[\text{راست}]{\text{۲ واحد}} y = \frac{5(x-2) + 13}{1 + (x-2)} = \frac{5x + 3}{x - 1} \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} y = \frac{5x + 3}{x - 1} - 3 = \frac{2x + 6}{x - 1} = f(x)$

$f^{-1}(x) = \frac{+x + 6}{x - 2}$　(a و d را قرینه و عوض می‌کنیم)　$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{2x + 6}{x - 1} = \frac{x + 6}{x - 2} \Rightarrow 2x^2 + 2x - 12 = x^2 + 5x - 6 \Rightarrow x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{S = 3}$

هیچکدام از ریشه‌ها هم (۲ و ۱) نیستند

۲

CamScanner

۱۵ $f(x)=x+4[x] \xrightarrow[y=x]{\text{قرینه نسبت به}} f^{-1}(x)$ $\quad y=x+4[x] \Rightarrow [y]=[x+4[x]]=[x]+4[x]=5[x] \Rightarrow [x]=\frac{[y]}{5}$ *

خارج می‌شود

$y=x+4[x] \xrightarrow[*]{\text{جایگذاری}} y=x+\frac{4[y]}{5} \Rightarrow x=y-\frac{4[y]}{5} \Rightarrow f^{-1}(x)=g(x)=x-4\frac{[x]}{5}$

$(f-g)(x)=x+4[x]-\left(x-4\frac{[x]}{5}\right)=\boxed{\frac{24[x]}{5}}$

۴