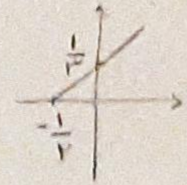
آزمایش کیا - تکمیلی ۱۰:

۱. جای x و y عوض می‌شود $\to 2x = 3y - 1 \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}$




$S = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{12}$

۲. نقطه ext باید در دامنه باشد $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$

با توجه به دامنه‌های داده شده هر دو تابع یک به یک هستند. $\Rightarrow y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 2$

$y - 2 = (x-1)^2 \to \sqrt{y-2} + 1 = x$

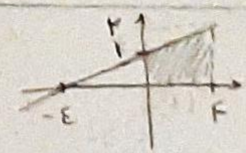
y و x عوض $\Rightarrow y = \sqrt{x-2} + 1$

الف) $x = 1 \to y = 2 \Rightarrow$ دامنه الف $\Rightarrow x \ge 2$

ب) $x = 3 \to y = 6 \Rightarrow$ دامنه ب $\Rightarrow x \ge 6$

۳. $2|x| - \underbrace{\sqrt{16 + 4x^2 - 16x}}_{(2x-4)^2} = 2x - |2x - 4| \to x \ge 2 : 4$

$\to x < 2 : 4x - 4$




در $(-\infty, 2]$ وارون پذیر است

$\frac{(1+2)\times 4}{2} = 6$

$y = 4x - 4 \Rightarrow y^{-1} = \frac{x+4}{4}$ ← فقط در این بازه می‌توان $f^{-1}$ را پیدا کرد

۴. $\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{x_1^2}{x_1^2 - 5} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 5} \Rightarrow x_1^2 x_2^2 - 5x_1^2 = x_1^2 x_2^2 - 5x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

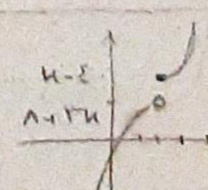
با توجه به $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$ درمی‌یابیم x و y هم علامت اند پس تساوی منفی به دست آمده غلط است پس $x_1 = x_2$ و تابع یک به یک است.

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 5} \Rightarrow y^2 x^2 - 5y^2 = x^2 \to x^2(y^2 - 1) = 5y^2$

$\Rightarrow x^2 = \frac{5y^2}{y^2 - 1} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2 - 1}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5y^2}{y^2 - 1}} \xrightarrow{\text{وارون}} y = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2 - 1}}$

۵. $x^2 - 4x + k$ $\quad \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - 4(2) + k = k - 4$

$-x^2 + 6x + 3k$ $\quad x = 2 \to -(2)^2 + 6(2) + 3k = 8 + 3k$




برای اینکه یک به یک باشد $8 + 3k$ باید پایین‌تر از $k - 4$ باشد $\Rightarrow 8 + 3k < k - 4$

$2k < -12 \Rightarrow k < -6$

پایین تر از k-۴ باشد    $2k < -12 \Rightarrow k < -6$

۶. $x \geq 0 \rightarrow f(x) = 4x \Rightarrow x = \frac{y}{4} \rightarrow y = \frac{x}{4}$

$x \leq 0 \rightarrow f(x) = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \rightarrow y = \frac{x}{2}$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{x}{4} + \frac{x}{2}}{2} = \dfrac{3x}{8} \\ \dfrac{\frac{x}{2} - \frac{x}{4}}{2} = \dfrac{x}{8} \end{array}\right\} \underbrace{\frac{3}{8}}_{a} x + \underbrace{\frac{1}{8}}_{b} |x|$    $ab = \frac{3}{64}$

۷. $x = 2 \rightarrow \dfrac{3(2)+4}{2+m} = -10 \Rightarrow 10 = -20 - 10m \Rightarrow m = -3 \Rightarrow \dfrac{3x+4}{x-3}$    $(a+d=0) \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$ (I)

$f \circ f^{-1}(x) = x$ (II) $\xrightarrow{\text{I, II}} x + \dfrac{3x+4}{x-3} = x \Rightarrow \dfrac{3x+4}{x-3} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-4}{3}$

۸. $f(3-2x) = \underbrace{2 - g(\tfrac{x}{2})}_{-2} \Rightarrow f^{-1}(-2) = 3 - 2x \Rightarrow x = \dfrac{3 - f^{-1}(2)}{2}$ ①    $2 - g(\tfrac{x}{2}) = -2 \Rightarrow g(\tfrac{x}{2}) = 4$

$g^{-1}(4) = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2g^{-1}(4) \Rightarrow 2g^{-1}(4) = \dfrac{3 - f^{-1}(-2)}{2} \Rightarrow 4g^{-1}(4) + f^{-1}(-2) = 3$

۹. قرینه $\rightarrow \dfrac{-(-5x-13)}{1+x} = \dfrac{5x+13}{x+1} \xrightarrow{\text{۲ واحد راست}} \dfrac{5(x-2)+13}{(x-2)+1} = \dfrac{5x+3}{x-1} \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} \dfrac{5x+3}{x-1} - 3 = \dfrac{5x+3-3x+3}{x-1}$

$\Rightarrow \dfrac{2x+6}{x-1}$    $\dfrac{2x+6}{x-1} = \dfrac{5x-13}{1-x} \Rightarrow 2x - 2x^2 + 6 - 6x = 5x^2 - 13x - 5x + 13 \Rightarrow 7x^2 - 14x + 7 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

۱۰. $\underset{t \leq x < t+1}{x + 4[x]} \rightarrow f(x) = x + 4t \Rightarrow y = x + 4t \Rightarrow x = y - 4t \Rightarrow y = x - 4t \rightarrow$ معادله $y^{-1}$ است

(تعویض $x$ و $y$)

$y - y^{-1} = (x + 4t) - (x - 4t) = 8t$    $f - g(x) = 8t = 8[x]$