۲۰ آفرین

درسی تسواری

۱) $x=0 \to y=-\frac{1}{2}$, $y=0 \to x=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow f^{-1} \to x=0 \to y=\frac{1}{3}$, $y=0 \to x=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \to S_f = S_{f^{-1}}$ (طول از مبدا و عرض از مبدا، در نتیجه حاصل ضرب یکسان.) ۲

۲)

الف] $x^2-2x+1+2 \to (x-1)^2+2 \to -\frac{b}{2a}=1 \to [1,+\infty) \to$ یک به یک $\to y=(x-1)^2+2 \to y-2=(x-1)^2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y-2}+1$ (منفی غ ق، $x \geq 1$) $\Rightarrow y=\sqrt{x-2}+1 \Rightarrow R_{f^{-1}} = D_f \Rightarrow x-2 \geq 0 \to x \geq 2 \to 1-2+3=2 \to [2,+\infty)$ ۲

ب] $\Rightarrow -\frac{b}{2a}=1 \to [3,+\infty) \to$ یک به یک $\Rightarrow y=\sqrt{x-2}+1 \Rightarrow R_{f^{-1}} = D_f \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow 9-2(3)+3=6$

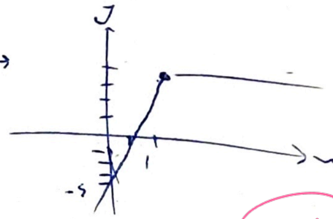
$\to [6,+\infty)$

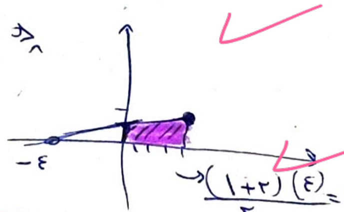
۳) $f(x) = 2x-\sqrt{16-16x+4x^2} = 2x-\sqrt{4(x^2-4x+4)} = 2x-\sqrt{4(x-2)^2} \Rightarrow 2x-2|x-2|$

$x>2 \Rightarrow 2x-2(x-2) \to 2x-2x+4 = 4$ / $x<2 \Rightarrow 2x+2x-4 \Rightarrow 4x-4 \to$

$\Rightarrow (-\infty,1] \Rightarrow y=4x-4 \Rightarrow y+4=4x \to \frac{x}{4}+1=y$

$D_f \to R_f = (-\infty,4]$





$\to \frac{(1+2)(4)}{2} = 3(2) = 6$ ۲

۴) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \Rightarrow y_1=y_2 \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow x_1^2(x_2^2-5) = x_2^2(x_1^2-5) \Rightarrow x_1^2x_2^2-5x_1^2 = x_2^2x_1^2-5x_2^2$

$x_1^2=x_2^2 \to x_1=\pm x_2$ $\Rightarrow$ فرض $\to y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$ (همراه مثبت) $\to$ x و y هم علامت هستند $\to x \neq -1$ یک به یک است.

$y\sqrt{x^2-5}=x \to y^2(x^2-5)=x^2 \to y^2x^2-5y^2=x^2 \to 5y^2=y^2x^2-x^2 \to x^2(y^2-1)=5y^2 \Rightarrow x^2=\frac{5y^2}{y^2-1} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}}$ ۲

$x=\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}} \to y=\sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}$

۵) ~~$-4+k+3k \ldots \geq 8+3k \ldots -12 \geq 2k \ldots$~~ $\Rightarrow (2) \to 4-8+k \geq -4+12+3k \to k-4 \geq 8+3k$

$-12 \geq 2k \to -6 \geq k$ ۲

۶)

$x>0 \to 3x+x=4x \to y=4x \to x=\frac{1}{4}y \to y=\frac{x}{4}$

$x<0 \to 2x \Rightarrow y=\frac{x}{2}$

$x>0$: $\frac{x}{4}$; $x<0$: $\frac{x}{2}$

$ax+b|x| \Rightarrow ax+bx$

$(a+b)x=\frac{x}{4}$

$(a-b)x=\frac{x}{2}$

$a+b=\frac{1}{4}$, $a-b=\frac{1}{2} \Rightarrow 2a=\frac{3}{4} \Rightarrow a=\frac{3}{8}$; $b=\frac{2}{8}-\frac{3}{8}=-\frac{1}{8}$ $\Rightarrow \frac{3}{8} \times -\frac{1}{8} = -\frac{3}{64}$ ۲

۷) $\frac{۴+۴}{۲+m} = -۱۰ \Rightarrow ۲+m = -۱ \Rightarrow m = -۳ \Rightarrow f \circ f^{-1}(x)) \Rightarrow (x) \rightarrow x + f^{-1}(x) = x \Rightarrow f^{-1}(x) = ۰$

$\frac{۳x+۴}{x-۳} \Rightarrow (۰) \Rightarrow \frac{۴}{-۳} = \frac{-۴}{۳}$ ✓ (۲)

---

۸)

g

$f^{-1}(-۲) = g(-۱)$

---

۸) $f(۳-۲x) = t \xrightarrow{f^{-1}} ۳-۲x = f^{-1}(t) \Rightarrow x = \frac{۳-f^{-1}(t)}{۲}$ / $g(\frac{x}{۲}) = ۲-t \Rightarrow \frac{x}{۲} = g^{-1}(۲-t) \Rightarrow x = ۲g^{-1}(۲-t)$

$\Rightarrow \frac{۳-f^{-1}(t)}{۲} = ۲g^{-1}(۲-t) \Rightarrow t = -۲ \Rightarrow ۳-f^{-1}(-۲) = ۴g^{-1}(۴) \Rightarrow (۳)$ ✓ (۲)

---

۹) $-(\frac{-۵x-۱۳}{۱+x}) \Rightarrow \frac{۵x+۱۳}{x+۱} \Rightarrow \frac{۵(x-۲)+۱۳}{x-۲+۱} - ۳ \Rightarrow \frac{۵x+۳}{x-۱} - ۳ = \frac{۲x+۶}{x-۱}$ (۲)

$\frac{۲x+۶}{x-۱} = x \rightarrow x^۲ - x = ۲x+۶ \rightarrow x^۲ - ۳x - ۶ = ۰ \rightarrow -\frac{b}{a} = ۳$ ✓

---

۱۰)

$y = x + ۴[x] \Rightarrow f^{-1} = g(x) \Rightarrow f-g \Rightarrow f \circ f^{-1}(x))$

$[y] = [x + ۴[x]] \Rightarrow ۵[x] = [y] \Rightarrow y = x + ۴[x] \Rightarrow [x] = \frac{[y]}{۵} \Rightarrow y = x + \frac{۴[y]}{۵}$ ✓ (۲)

$\frac{y - ۴[y]}{۵} = x \xrightarrow{f^{-1}} y = \frac{۵x - ۴[x]}{۵} \Rightarrow f-g \Rightarrow x + ۴[x] - \frac{۵x - ۴[x]}{۵} \Rightarrow ۴[x] + \frac{۴[x]}{۵} \Rightarrow \frac{۲۴}{۵}[x] = ۴/۸[x]$

$۴/۸[x]$ ✓