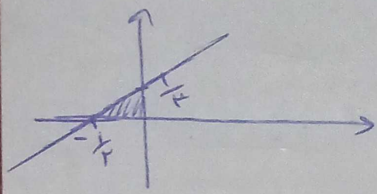
سوالات امتحان

۱-
$3y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3x-1}{2} \Rightarrow x = \frac{3y-1}{2} \Rightarrow 2x+1 = 3y \quad y = \frac{2x+1}{3}$



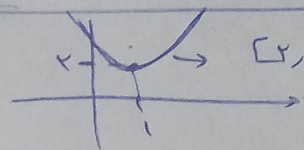
$0 = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{2(0)+1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

$S = \frac{1}{3} \times \left|\frac{1}{2}\right| \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

۲-
$y = x^2 - 2x + 3$ طول رأس $= \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$

از $[1,+\infty)$ یک به یک است



$\to [2,+\infty)$ بر

$y = x^2 - 2x + 1 + 2 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 1 + 2$

$(y-1)^2 + 2 \Rightarrow x - 2 = (y-1)^2 \Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{x-2}$

$y = \pm\sqrt{x-2} + 1$

$D_f = R_{f^{-1}} \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow +\sqrt{x-2}$ قابل قبول است

$R_{f^{-1}} = D_f$

$y = +\sqrt{x-2} + 1$

$D_y = x \geq 2$

ب) این قسمت نیز مانند قسمت قبل

با این تفاوت که برد تابع در این دامنه برابر است با

$(3)^2 - 2(3) + 3 = 6 \quad R_f = [6,+\infty)$

باشد.

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1 \Rightarrow x \in [6,+\infty)$

۳-
$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = f(x) = 2x - \sqrt{(2x-4)^2} = 2x - |2x-4|$

$2x - 4 = 0$
$x = 2$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{2} \\ 2x + 2x - 4 = & 2x - 2x + 4 = 4 \\ 4x - 4 & \end{array}$$

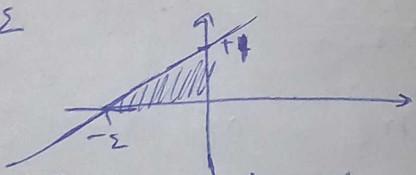
$y = 4x - 4 \Rightarrow x = 4y - 4$

جای x و y عوض

$\frac{x+4}{4} = y$

$0 = \frac{x+4}{4} \Rightarrow x = -4$

$y = \frac{0+4}{4} = 1$



$S = 1 \times 4 \times \frac{1}{2} = 2$

۴-
$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2-5} \Rightarrow y^2x^2 - 5y^2 = x^2 \quad y^2x^2 - x^2 = 5y^2$

$x^2(y^2-1) = 5y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{5y^2}{y^2-1} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}} \Rightarrow$ علامت مثبت قابل قبول است

$y = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}$

علامت زائد به دلیل توان ۲ است

$\left.\begin{array}{l}(x_1, y) \in f \\ (x_2, y) \in f\end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}}$

به توان ۲ می‌رسانیم

$\frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5} \Rightarrow x_1^2x_2^2 - 5x_1^2 = x_2^2x_1^2 - 5x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

اما فقط علامت مثبت قابل قبول است زیرا x و y همراه هم علامت اند.

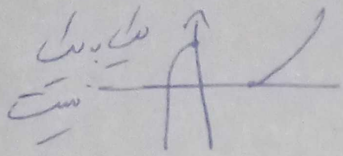
سوالات زاریان

۵) اگر به‌ازای این تابع یک‌به‌یک باشد آنگاه باید

$$(2)^2 - 4(2) + k \geq -(2)^2 + 6(2) + 3k$$

$$\Rightarrow 4 - 8 + k \geq -4 + 12 + 3k \Rightarrow 2k \leq -12 \Rightarrow \boxed{k \leq -6}$$

در غیر این صورت تابع یک به یک نخواهد بود



$k = 4$

---

۶)

$3x - x = 2x \quad | \quad 3x + x = 4x$

$y = 2x \qquad y = 4x$

$x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2} \qquad \Rightarrow x = 4y \Rightarrow y = \frac{x}{4}$

$$\frac{\frac{1x}{4} + \frac{1x}{2}}{2} = \frac{3x}{8}$$

$$\frac{\frac{1x}{4} - \frac{1x}{2}}{2} = \frac{x}{8}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{3x}{8}}_{a} + \underbrace{\frac{1}{8}}_{b}|x| = \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{64}$$

---

۷)

$$f(2) = \frac{3(2)+4}{2+m} = 10 \Rightarrow \frac{10}{2+m} = 10 \Rightarrow m = -1$$

$$f(x) = \frac{3x+4}{x-1} \qquad f^{-1}(x) = x = \frac{3y+4}{y-1} \Rightarrow xy - x = 3y + 4$$

تابع هموگرافیک یک به یک است

$$xy - 3y = x + 4$$

$$y(x-3) = x + 4 \Rightarrow \boxed{y = \frac{x+4}{x-3}}$$

$$fof^{-1}(x) = x \Rightarrow D_{fof^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$x + \frac{x+4}{x-3} = x \Rightarrow \frac{x+4}{x-3} = 0 \Rightarrow x = -4$$

سوگند زارعان

(۹) قرینه نسبت به مبدا مختصات. یعنی x و y قرینه بشوند.

$$-y = \frac{-5x-13}{1+x} \Rightarrow y = \frac{5x+13}{1-x}$$

۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین

$$\Rightarrow y = \frac{5(x-2)+13}{1+(x-2)} - 3 = \frac{2x+4}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x|2) \quad x = \frac{2y+4}{y-1} \Rightarrow xy - x = 2y+4$$

$$y(x-2) = x+4 \Rightarrow y = \frac{x+4}{x-2} = f^{-1}(x)$$

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow 2x^2 - 4x + \cancel{4x} - 12 = x^2 + 4x - x - 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad S = -\frac{b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = \boxed{3}$$

مجموع طول نقاط

(۱۵) قرینه خودش نسبت به $y=x$ یعنی پیدا کردن تابع معکوس.

$$y = x + 4[x] \Rightarrow x = y + 4[y] \Rightarrow [x] = [y + 4[y]]$$

جای x و y رو عوض

از ۲ طرف براکت می‌گیریم

$$[x] = [y] + 4[y] \Rightarrow y = x - 4[y]$$

$$[x] = 5[y] \Rightarrow [y] = \frac{[x]}{5} \Rightarrow y = x - 4 \times \frac{[x]}{4}$$

$$y = x - [x]$$

$$(f-g)(x) = x + 4[x] - x + [x] = 5[x]$$