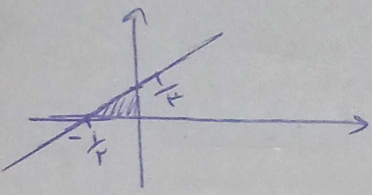
۱۵/۷۵

سوگند راهیان

-① $2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3x-1}{2} \Rightarrow x = \frac{3y-1}{2} \Rightarrow 2x+1 = 3y \quad y = \frac{2x+1}{3}$



$0 = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

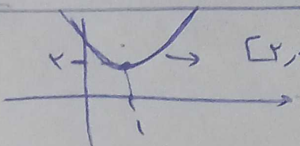
$y = \frac{2(0)+1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

$S = \frac{1}{2} \times \left|\frac{1}{2}\right| \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ ✓

②

-② $y = x^2 - 2x + 3 \quad$ راس سهمی $= \frac{-(-2)}{2(1)} = ①$

از $[1,+\infty)$ یک به یک است



در $[2,+\infty)$

②

$y = x^2 - 2x + 1 + 2 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 1 + 2$

$(y-1)^2 + 2 \Rightarrow x - 2 = (y-1)^2 \Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{x-2}$ ✓

$y = \pm\sqrt{x-2} + 1$

$\begin{cases} D_f = R_{f^{-1}} \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow +\sqrt{x-2} \\ R_{f^{-1}} = D_f \end{cases}$ قابل قبول است

$y = +\sqrt{x-2} + 1$

$D_y = x \geq 2$ ✓

ب) این قسمت نیز مانند قسمت قبل با این تفاوت که برد تابع در این دامنه برابر است با

$(3)^2 - 2(3) + 3 = 6 \quad R_f = [6,+\infty)$ ✓

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1 \Rightarrow x \in [6,+\infty)$ باشد. ✓

---

③ $f(x) = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = f(x) = 2x - \sqrt{(2x-4)^2} = 2x - |2x-4|$ ✓

$2x - 4 = 0$

$x = 2$

۱,۷۵

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{2} \\ 2x + 2x - 4 = 4x - 4 & 2x - 2x + 4 = 4 \end{array}$$

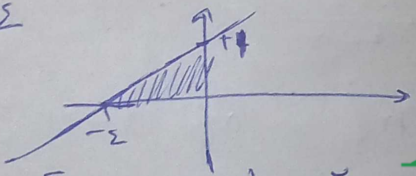
$y = 4x - 4 \Rightarrow x = 4y - 4$

جای x و y عوض

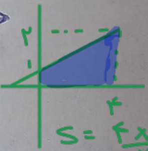
$\frac{x+4}{4} = y$ ✓

$0 = \frac{x+4}{4} \Rightarrow x = -4$

$y = \frac{0+4}{4} = ①$



$S = 1 \times 4 \times \frac{1}{2} = 2$



$S = \frac{4 \times 3}{2} = ⑥$

مساحت با قسمت (+) محور x ها را می خواهد

-④ $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2-5} \Rightarrow y^2x^2 - 5y^2 = x^2 \quad y^2x^2 - x^2 = 5y^2$ ✓

②

$x^2(y^2-1) = 5y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{5y^2}{y^2-1} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}} \Rightarrow$ جواب مثبت قابل قبول است ✓

$y = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}$

$\left.\begin{array}{l} (x_1, y) \in f \\ (x_2, y) \in f \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}}$ ✓

جواب زائد به دلیل توان ۲ است

به توان ۲ می رسانیم $\frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5} \Rightarrow x_1^2x_2^2 - 5x_1^2 = x_2^2x_1^2 - 5x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$ ✓

اما فقط جواب مثبت قابل قبول است زیرا x و y همواره هم علامت اند. ✓

سوگند زارعیان

---

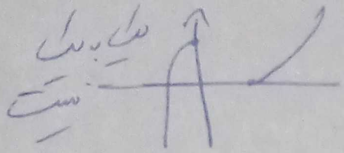
(۵) اگر بخواهیم این تابع یک به یک باشد آنگاه باید ⇐

$(۲)^۲ - ۴(۲) + k \geq -(۲)^۲ + ۶(۲) + ۳k$

$\Rightarrow ۴ - ۸ + k \geq -۴ + ۱۲ + ۳k \Rightarrow ۲k \leq -۱۲ \Rightarrow \boxed{k \leq -۶}$

۲

در غیر این صورت تابع یک به یک نخواهد بود



$k = ۴$

---

(۶)

$\dfrac{\frac{۱x}{۴} + \frac{۱x}{۲}}{۲} = \dfrac{۳x}{۸}$

$\dfrac{\frac{۱x}{۴} - \frac{۱x}{۲}}{۲} = \dfrac{x}{۸}$

۱٫۷۵

$۳x - x = ۲x \mid ۳x + x = ۴x$

$y = ۲x \qquad y = ۴x$

$x = ۲y \Rightarrow y = \frac{x}{۲} \qquad \Rightarrow x = ۴y \Rightarrow \frac{x}{۴}$

شیب $x<۰$ از شیب $x \geq ۰$ بیشتر است پس b باید منفی باشد

$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{۴} & x \geq ۰ \\ \frac{x}{۲} & x < ۰ \end{cases} \qquad \underset{a}{\frac{۳x}{۸}} + \underset{b}{\frac{۱}{۸}}|x| = \frac{۳}{۸} a \frac{۱}{۸} = \frac{۳}{۶۴} \qquad b = -\frac{۱}{۸}$

$ab = \frac{۳}{۸} \times -\frac{۱}{۸} = -\frac{۳}{۶۴}$

---

(۷)

۱٫۲۵

$f(۲) = \dfrac{۳(۲) + ۴}{۲ + m} = \cancel{۱۰}\ {-۱۰} \Rightarrow \dfrac{۱۰}{۲+m} = ۱۰ \Rightarrow m = -۳$

دقت کن ☹

$f(x) = \dfrac{۳x + ۴}{x - ۱} \qquad f^{-1}(x) = x = \dfrac{۳y + ۴}{y - ۱} \Rightarrow xy - x = ۳y + ۴$

تابع همواره یک به یک است

$xy - ۳y = x + ۴$

$y(x - ۳) = x + ۴ \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{x + ۴}{x - ۳}}$

$fof^{-1}(x) = x \Rightarrow D_{fof^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{۳\}$

$x + \dfrac{x + ۴}{x - ۳} = x \Rightarrow \dfrac{x + ۴}{x - ۳} = ۰ \Rightarrow \boxed{x = -۴}$

$f(x) = \dfrac{۳x + ۴}{x - ۳} \rightarrow a + d = ۰ \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{۳x + ۴}{x - ۳}$

$fof^{-1}(x) = x \rightarrow \dfrac{۳x + ۴}{x - ۳} = ۰ \rightarrow x = -\dfrac{۴}{۳}$

سوگند زارعیان

---

(۶) قرینه نسبت به مبدا مختصات. یعنی x و y قرینه شوند.

[illegible]

$-y = \frac{-۵x-۱۳}{۱+x} \Rightarrow y = \frac{۵x+۱۳}{۱+x}$

(۲)

۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین

$\Rightarrow y = \frac{۵(x-۲)+۱۳}{۱+(x-۲)} - ۳ = \frac{۲x+۶}{x-۱}$

$f(x) = \frac{۲x+۶}{x-۱} \Rightarrow f^{-1}(x) = ? \quad x = \frac{۲y+۶}{y-۱} \Rightarrow xy - x = ۲y+۶$

$y(x-۲) = x+۶ \Rightarrow y = \frac{x+۶}{x-۲} = f^{-1}(x)$

$\frac{x+۶}{x-۲} = \frac{۲x+۶}{x-۱} \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۶x - ۱۲ = x^۲ + ۶x - x - ۶$

$x^۲ - ۳x - ۶ = ۰ \quad S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۳)}{۱} = \boxed{③}$

مجموع طول نقاط

---

(۱۵) قرینه نمودار نسبت به $y=x$ یعنی پیدا کردن تابع معکوس.

(۱)

$[y] = [x] + ۴[x] \to [x] = \frac{[y]}{۵}$

$f^{-1}(x) = x - \frac{۴}{۵}[x]$

$f-g = x + ۴[x] - x + ۰٫۸[x] = ۴٫۸[x]$

$y = x + ۴[x] \Rightarrow x = y + ۴[y] \Rightarrow [x] = [y + ۴[y]]$

از ۲ طرف براکت می‌گیریم

$[x] = [y] + ۴[y] \Rightarrow \boxed{y = x - ۴[y]}$

$[x] = ۵[y] \Rightarrow [y] = \frac{[x]}{۴} \Rightarrow y = x - ۴\times\frac{[x]}{۴}$

$y = x - [x]$

$(f-g)(x) = x + ۴[x] - x + [x] = ۵[x]$

سوال ۸

$f(۲-۳x) = t \to f^{-1}(t) = ۲-۳x \to x = \frac{۲-f^{-1}(t)}{۳}$

$g(\frac{x}{۲}) = ۲-t \to g^{-1}(۲-t) = \frac{x}{۲}$

$t = -۲ \to f^{-1}(-۲) + ۴g^{-1}(۴) =$ ③