فاطمه رسولی - دوره ...

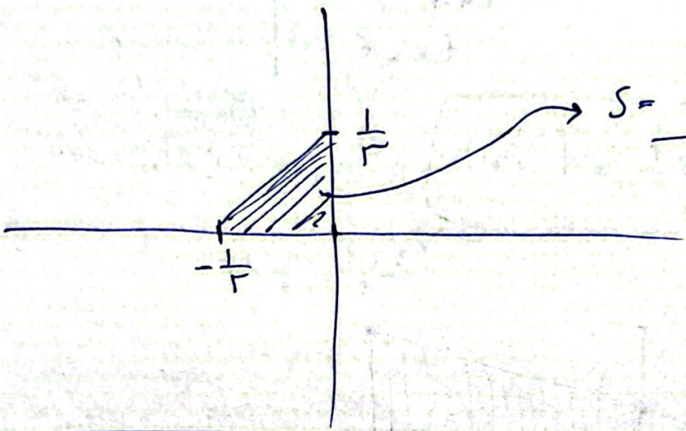
۱۴/۵ آفرین

سوال ۱

$2y = 3x - 1 \to 2x + 1 = 3y \to y = \frac{2x+1}{3}$

۲

$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3} \xrightarrow[\text{محور مختصات}]{\text{برخورد با}} y = \frac{2(0)+1}{3} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix}$



$S = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{12}$

سوال ۲

۲

الف) $y = x^2 - 2x + 2 \quad x \in [1, +\infty)$

$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ یعنی تنها یک به یک است با لحاظ کردن از x_s

در طول یا به سمت راست ترکیب یک به یک است یا به سمت چپ تنها یک به یک است

معکوس $y = x^2 - 2x + 1 + 2 \to y = (x-1)^2 + 2 \to x - 2 = (y-1)^2$

$\pm\sqrt{x-2} + 1 = y \to f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-2} + 1$

فقط + بخاطر دامنه

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

$D_{f^{-1}(x)} = [2, +\infty)$

$R_{f(x)} = D_{f^{-1}(x)}$

$1^2 - 2 + 2 = [2, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 2 \to -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad x \in [3, +\infty)$

چون از راس به بعد یک به یک است

$y = x^2 - 2x + 1 + 2 \to y = (x-1)^2 + 2 \to x - 2 = (y-1)^2$

مثبت (+) $\sqrt{x-2} + 1 = y \to f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

$R_{f(x)} = D_{f^{-1}(x)} \to 9 - 6 + 2 = 5 \quad [5, +\infty)$

سوال ۳

$$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)}$$

$$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2}$$

$$f(x) = 2x - \sqrt{(2x-4)^2}$$

$$f(x) = 2x - |2x-4|$$

$$2\times 2 - |4 - 4| = 4$$

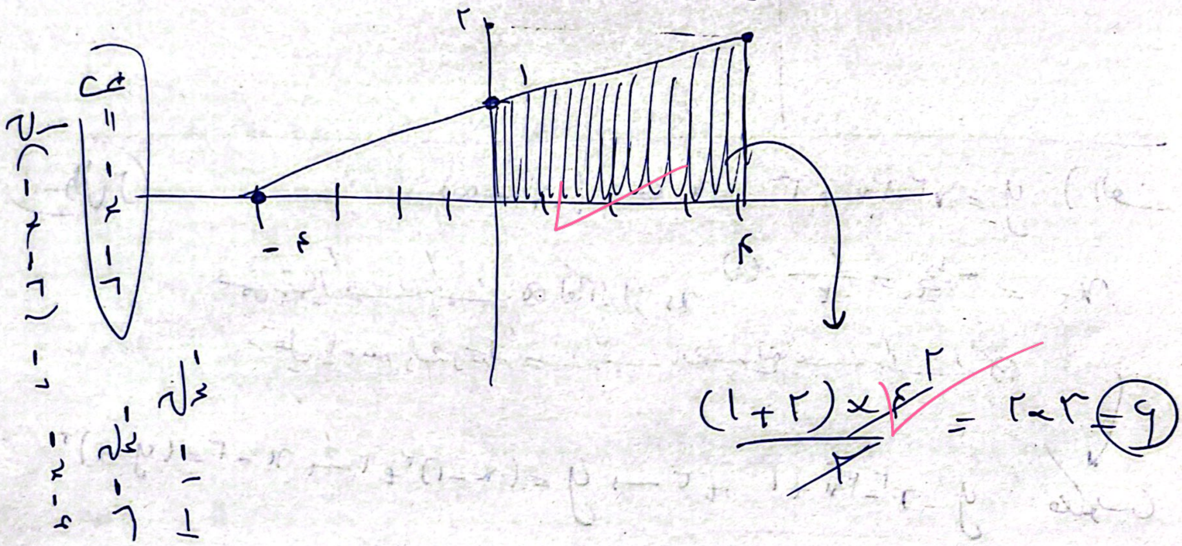
۲

$2x+2x-4$	$2x-2x+4$
$4x-4$	4

یک به یک ✗ کد معکوس دارد

$$y = 4x - 4 \longrightarrow \boxed{\frac{x+4}{4} = f^{-1}(x)}$$

$$\frac{4+4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$



$$\frac{(1+2)\times \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} = 2\times 3 = 6$$

سوال ۴

۱/۵

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \xrightarrow{\text{۲ توان}} y^2 = \frac{x^2}{x^2-5}$$

$$y^2x^2 - 5y^2 = x^2 \rightarrow y^2x^2 - x^2 = 5y^2 \rightarrow x^2(y^2-1) = 5y^2$$

$$x^2 = \frac{5y^2}{y^2-1} \rightarrow y^2 = \frac{5x^2}{x^2-1} \rightarrow f^{-1}(x)^2 = \frac{5x^2}{x^2-1}$$

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$$

اثبات یک به یک بودن؟

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5} \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1 = \pm x_2$$

یک y نمی‌تواند دو x مختلف العلامت بدهد ←

$$x_1 = x_2$$

سوال ۶

$$g(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴x + k & x \geq ۲ \xrightarrow{۲} ۴ - ۸ + k \\ & -۴ + k \\ -x^۲ + ۶x + ۲k & x < ۲ \rightarrow -۴ + ۱۲ + ۲k \rightarrow ۸ + ۲k \end{cases}$$

$-۴ + k \geq ۸ + ۲k \longrightarrow ۲k \leq -۱۲ \longrightarrow \boxed{k \leq -۶}$

۲

سوال ۷

$f(x) = \dfrac{۲x + ۴}{x + m}$ $\quad [\,۲ \; -۱۰\,]$

$-۱۰ = \dfrac{۶ + ۴}{۲ + m} \longrightarrow \dfrac{-۱}{\cancel{۱۰}} = \dfrac{\cancel{۱۰}}{۲ + m} \longrightarrow -۲ - m = ۱ \longrightarrow -m = ۳$

$\boxed{m = -۳}$

۲

$y = \underset{x}{\underbrace{f \circ f^{-۱}}} + f^{-۱}(x)$

$\cancel{x} + \dfrac{۲x + ۴}{x - ۲} = \cancel{x} \longrightarrow ۲x + ۴ = ۰ \longrightarrow ۲x = -۴$

$\boxed{x = -\dfrac{۴}{۲}}$

سوال ۸

$۴g^{-۱}(۴) + f^{-۱}(-۲)$ $\qquad f(\underbrace{(۲ - ۲x)}_{a}) = ۲ - g(\underbrace{\tfrac{x}{۲}}_{b})$

$f(a) = -۲ \longrightarrow f^{-۱}(-۲) = a$

$g(b) = ۴ \longrightarrow g^{-۱}(۴) = b$

۲

$۴b + a \longrightarrow ۴(\tfrac{x}{۲}) - ۲x + ۳ = ۴(\tfrac{x}{۲}) - ۲x + ۲$

$۲x - ۲x + ۲ = ۳$

سوال ۹

$ab = ?$ $\qquad g(x) = ax + b|x|$

$f(x) = ۲x + |x|$

$(a - b)x$	$(a + b)x$

$۲x$	$۴x$

$\rightarrow f^{-۱} = (\tfrac{x}{۴})$

$f^{-۱} = \tfrac{x}{۲}$

۶

$a + b = \tfrac{۱}{۴}$

$a + \cancel{b} = \tfrac{۱}{۲} \longrightarrow ۲a = \tfrac{۳}{۴} \longrightarrow a = \tfrac{۳}{۸}$ $\quad b = -\tfrac{۱}{۸}$ $\quad ab = -\tfrac{۳}{۶۴}$

سوال ۹

$$y=\frac{5x-12}{1-x}\xrightarrow[(0;0)]{\text{قرینه نسبت}}-y=\frac{-5x-12}{+1+x}$$

دو واحد راست

$$y=\frac{5x+12}{x+1}\longrightarrow y=\frac{5(x-2)+12}{(x-2)+1}\longrightarrow y=\frac{5x+2}{x-1}$$

پایین

$$y=\frac{5x+2}{x-1}-3\longrightarrow y=\frac{5x+2-3x+3}{x-1}$$

$$\boxed{y=\frac{2x+5}{x-1}}$$

۲

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x+5}{x-2}$$

$$\frac{x+5}{x-2}=\frac{2x+5}{x-1}\longrightarrow 2x^2-4x+5x-10=x^2+4x-5$$

$$x^2-3x-5=0$$

$$x^2-Sx+P=0$$

$$\boxed{S=3}$$

سوال ۱۰

$$f(x)=x+4[x]\longrightarrow x=y+4[y]$$

$$y=x-4[y]\longrightarrow x=y+4[y]$$

$$[x]=[y+4[y]]$$

$$[x]=[y]+4[y]=5[y]$$

$$[y]=\frac{[x]}{5}\longrightarrow 4[y]=\frac{4[x]}{5}$$

$$y=x-\frac{4[x]}{5}$$

۲

$$(f-g)(x)\longrightarrow f(x)-g(x)\longrightarrow \cancel{x}+4[x]-\cancel{x}+\frac{4[x]}{5}$$

$$4[x]+\frac{4[x]}{5}\longrightarrow\frac{20[x]+4[x]}{5}\longrightarrow\boxed{\frac{24[x]}{5}}$$

$$D_{f^{-1}}=R_f=\{x/x\ \ldots$$