۱۷/۲۵

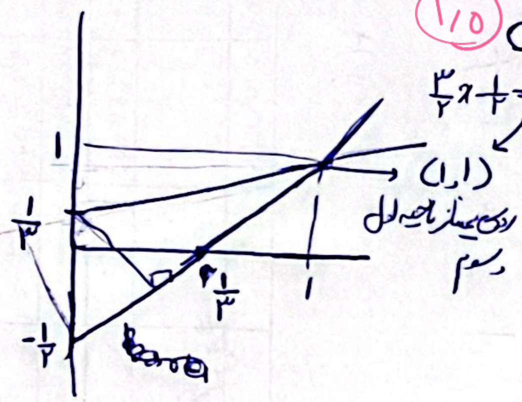
سارینا سلکی — تکلیف شمارهٔ ۱۰

---

① (۱/۵)

$\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=x \Rightarrow x=1$

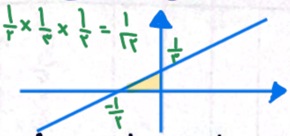
$(1,1)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم



$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ ⟵ تابعی الیه ۲ صعودی است پس وارونش را روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می‌کند.

$\boxed{g^{-1}=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}$

$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$



ارتفاع $=$ فاصله نقطه $(0,\frac{1}{2})$ از خط g $=\frac{\left|0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{9}{4}}}=\frac{10}{\sqrt{13}}$

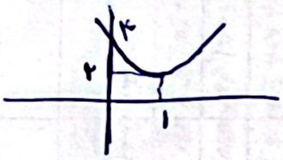
قاعده $=\sqrt{(1-0)^2+(1+\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$S=\frac{10}{\sqrt{13}}\times\frac{\sqrt{13}}{2}\times\frac{1}{2}=2/5$

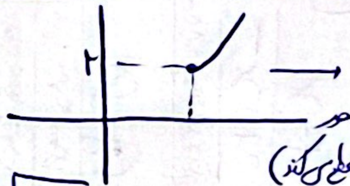
---

② (۲)

الف) $y=x^2-2x+3$



$\Rightarrow$



⟵ یک به یک

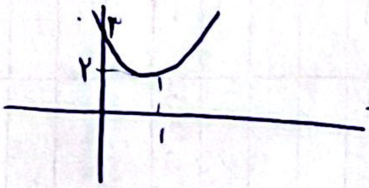
(هر خط موازی محور xها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند)

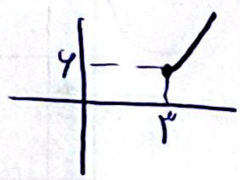
$y=(x-1)^2+2 \Rightarrow \pm\sqrt{y-2}+1=x \Rightarrow y^{-1}=\pm\sqrt{y-2}+1 = y^{-1}=\sqrt{y-2}+1$

$D_{g^{-1}}=R_g=[2,+\infty)$

دامنه g همان برد g^{-1} است از ۱ به بالا است پس علامت رادیکال $(+)$ است

ب) $y=x^2-2x+3$





⟵ یک به یک

$y=(x-1)^2+2 \Rightarrow y^{-1}=\pm\sqrt{y-2}+1=+\sqrt{y-2}+1$

دامنه g^{-1} همان برد g است $[6,+\infty)$ پس کمترین مقدار رادیکال ۲ است و به خاطر اینکه برد g^{-1} همان دامنه g است از ۳ به بعد است پس علامت رادیکال $(+)$ است.

③ 1,5

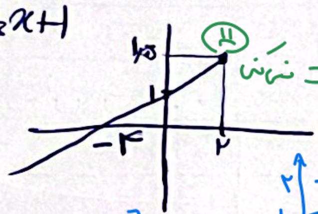
$~~[\text{crossed out}]~~ \quad f(x) = 2x - \sqrt{4(4 - x(4-x))}$

$\Rightarrow f(x) = 2x - \sqrt{4(x-2)^2} = 2x - 2|x-2|$

2	
$2x+2x-4$	$2x-2x+2$
$4x-4$	$=2$

$y = 4x-4 \Rightarrow y^{-1} = \frac{x+4}{4} = \frac{1}{4}x+1$

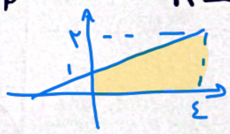
ضابطه $= D_{y^{-1}} = (-\infty, 2]$



$D = (-\infty, 2]$

$R = (-\infty, 4]$ ①

$S_\Delta = \frac{1,5 \times 6}{2} = 4,5$ $\quad D_{y^{-1}} = R_y = (-\infty, 4]$



$\rightarrow S = \frac{4(1+2)}{2} = 6$

---

④ 2

$y = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}$, $\quad y = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow x_1^2(x_2^2-5) = x_2^2(x_1^2-5)$

$\Rightarrow -5x_1^2 = -5x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

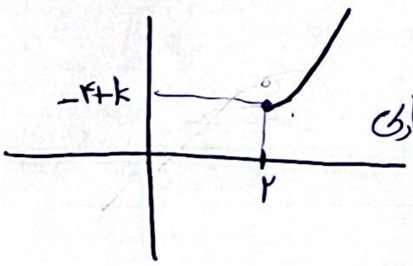
$\Rightarrow x_1 = \pm x_2$

y همواره با x هم‌علامت است و چنین چیزی ممکن نیست که به ازای یک y دو x قرینه داشته باشیم پس $x_1 = x_2$ یک به یک است.

$y^2 = \frac{x^2}{x^2-5} \Rightarrow x^2 = \frac{5y^2}{y^2-1} \Rightarrow y^{-1} = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}$ $\quad D = [\sqrt{5}, +\infty) \cup (-\infty, -\sqrt{5}]$

---

⑤



$-x^2+6x+2k$

به ازای $x=2$ باید کوچکتر مساوی $-4+k$ باشد

پس $8+2k \le -4+k$

$2k \le -12 \Rightarrow k \le -6$

2

$f(x)$:

	0	
	$2x$	$4x$

$y=2x \Rightarrow y^{-1}=\frac{x}{2}$ $y=4x \Rightarrow y^{-1}=\frac{x}{4}$

$R=D=(-\infty,0]$ $R=D=[0,+\infty)$

6

0	
$\frac{ax-bx}{(a-b)x}$	$\frac{ax+bx}{(a+b)x}$

$R_{g^{-1}}=D_{g^{-1}}=(-\infty,0]$ $R_{g^{-1}}=D_{g^{-1}}=[0,+\infty)$

2

$$\left.\begin{array}{l} a+b=\frac{1}{4} \\ a-b=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{3}{8},\ b=-\frac{1}{8}$$

$a\times b=\frac{3}{8}\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{-3}{64}$

7

$\frac{6+4}{2+m}=-10 \Rightarrow 2+m=-1 \Rightarrow m=-3$ $f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{x-3}$

2

$y=x+\frac{3x+4}{x-3}=\frac{x^2+4}{x-3} \Rightarrow \frac{x^2+4}{x-3}=x \Rightarrow x^2-3x=x^2+4$

$\Rightarrow x=\frac{-4}{3}$

$x\in D_{f^{-1}} \Rightarrow x\in R_f=\mathbb{R}-\{3\}$

8

$3-2x=t \rightarrow \frac{3-t}{2} \Rightarrow f(t)=2-g\left(\frac{3-t}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x)=2-g\left(\frac{3-x}{2}\right)$

$f^{-1}(2)=f(a)=2 \Rightarrow -2=2-g\left(\frac{3-x}{2}\right) \Rightarrow g\left(\frac{3-x}{2}\right)=4 \Rightarrow g^{-1}(4)=\frac{3-x}{2}$

$\Rightarrow x=-2g^{-1}(4)+3$

$y=-2g^{-1}(4)+3+2g^{-1}(4)=3$

---

9 1,25

$-y=\frac{-5(x-2)-13}{1+(x-2)} \Rightarrow y=\frac{12x-20}{x-1} \Rightarrow y^{-1}=\frac{x-20}{x-12}$

$\frac{x-20}{x-2}=\frac{12x-20}{x-1} \Rightarrow x^2-21x+20=12x^2-164x+240 \Rightarrow x^2-13x+20=0$

$S=\frac{-b}{a}=3$

$-y=\frac{-5x-13}{x-1} \rightarrow y=\frac{5x+13}{x-1} \rightarrow y=\frac{5(x-2)+18}{x-1}-3 \rightarrow y=\frac{2x+4}{x-1}$

$f^{-1}(x)=\frac{x+4}{x-2} \rightarrow f(x)=f^{-1}(x) \rightarrow x^2-3x-4=0$ $-\frac{b}{a}=3$

$$[y] = ۴[x] + [x] \rightarrow [x] = \frac{[y]}{۵} \longrightarrow f^{-1}(x) = g(x) = x - \frac{۴}{۵}[x]$$

$$f - g = x + ۴[x] - x + ۰/۸[x] = ۴/۸\,[x]$$

1

$$y = x + ۴[x] \xrightarrow[\text{عوض کن}]{\text{جای } x,y} x = y + ۴[y] \xrightarrow{y = x + ۴[x]} x = y + ۴\big[x + ۴[x]\big]$$

$$\Longrightarrow x = y + ۴\big([x] + ۴[x]\big) = y + ۲۰[x]$$

$$\Longrightarrow y' = x - ۲۰[x] = g(x)$$

$$f(x) - g(x) = x + ۴[x] - x + ۲۰[x]$$

$$= ۲۴[x]$$