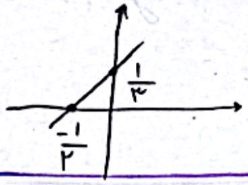
دوازدهم خبره B

تکلیف شماره ۱۰

هنرنیا ریاضی

۱

$f(x) = \frac{۳x-۱}{۲}$ $\quad f^{-1}(x) = \frac{۲x+۱}{۳}$



$S = \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}}{۲} = \boxed{\frac{۱}{۱۲}}$

۲

الف) $y = x^۲ - ۲x + ۳ = (x-۱)^۲ + ۲$ // $\quad f^{-1}(x) = \sqrt{x-۲} + ۱ \quad D_{f^{-1}} = [+۲, +\infty)$

$x \in [۱, +\infty)$ یک‌به‌یک است

ب) $y = x^۲ - ۲x + ۳ = (x-۱)^۲ + ۱$ // $\quad f^{-1}(x) = \sqrt{x-۲} + ۱ \quad D_{f^{-1}} = [۵, +\infty)$

$x \in [۳, +\infty)$ یک‌به‌یک است

۳

$f(x) = ۲x - \sqrt{۱۶ - ۴x(۴-x)} = ۲x - |۲(x-۲)| = \begin{cases} ۴ & x \geq ۲ \\ ۴x - ۴ & x < ۲ \end{cases}$

$۴x^۲ - ۱۶x + ۱۶$

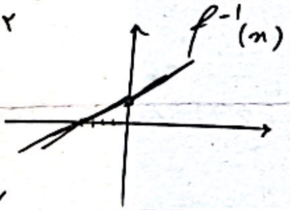
$۴(x^۲ - ۴x + ۴)$

$۴(x-۲)^۲$

$f^{-1}(x) \Rightarrow y = ۴x - ۴$

$x = ۴y - ۴ \quad ۴y = x + ۴ \quad y = \frac{x+۴}{۴}$

$f^{-1}(x) = \frac{۱}{۴}x + ۱$



$S = \frac{۴ \times ۱}{۲} = \boxed{۲}$

۴

$y = \frac{x}{\sqrt{x^۲ - ۵}}$ یک‌به‌یک است $\longrightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^۲ - ۵}} \quad x^۲ = \frac{y^۲}{y^۲ - ۵} \quad y^۲ = \frac{۵x^۲}{x^۲ - ۱} \quad y = \pm\sqrt{\frac{۵x^۲}{x^۲ - ۱}}$

۵

$g(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴x + k & x \geq ۲ \xrightarrow{x=۲} k - ۴ \\ -x^۲ + ۶x + ۳k & x < ۲ \xrightarrow{x=۲} ۳k + ۸ \end{cases}$

$k - ۴ \geq ۳k + ۸$

$۲k \leq -۱۲ \quad \boxed{k \leq -۶}$

۶

$f(x) = ۳x + |x| = \begin{cases} ۴x & x > ۰ \\ ۲x & x < ۰ \end{cases} \rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{۴} & x > ۰ \\ \frac{x}{۲} & x < ۰ \end{cases}$

$x > ۰ \rightarrow ax + bx = (a+b)x = \frac{x}{۴} \quad (a+b) = \frac{۱}{۴} \quad a = \frac{۳}{۸} \quad ab = \frac{-۳}{۶۴}$

$x < ۰ \rightarrow ax - bx = (a-b)x = \frac{x}{۲} \quad (a-b) = \frac{۱}{۲} \quad b = \frac{-۱}{۸}$

۷

$f(x) = \frac{۳x+۴}{x+m} \xrightarrow{(۲,-۱۰)} \frac{۱۰}{۲+m} = -۱۰ \quad m = \frac{-۳}{۲} \quad f(x) = \frac{۳x+۴}{x - \frac{۳}{۲}}$

$y = x + f^{-1}(x) = x + \frac{۳x-۸}{۲x-۹} \longrightarrow x + \frac{۳x-۸}{۲x-۹} = x \quad ۳x - ۸ = ۰ \quad x = \frac{۸}{۳}$

$f^{-1}(x) \Rightarrow x = \frac{۳y+۴}{y - \frac{۳}{۲}} \quad y = \frac{۳x-۸}{۲x-۹}$

۸

$$f(۳-۲x) = ۲ - g\left(\frac{x}{۲}\right)$$

$$f^{-1}(-۲) = m \longrightarrow f(m) = -۲$$

$$۳-۲x = m$$

$$۲ - g\left(\frac{x}{۲}\right) = -۲ \qquad g\left(\frac{x}{۲}\right) = ۴ \longrightarrow g^{-1}(۴) = \frac{x}{۲}$$

۹

$$y = \frac{۵x-۱۳}{۱-x} \qquad -y = \frac{-۵x-۱۳}{۱+x} \longrightarrow y = \frac{۵x+۱۳}{x+۱}$$

$$y = \frac{۵(x-۲)+۱۳}{(x-۲)+۱} - ۳ = \frac{۵x+۳}{x-۱} - ۳$$

$$\frac{۵x+۳}{x-۱} - ۳ = \frac{۵x-۱۳}{۱-x} \qquad ۷x^۲ - ۱۴x + ۷ = ۰ \qquad x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \qquad (x-۱)^۲ = ۰$$

$$x = ۱$$