۱۸/۵

دوازدهم دفتر B — خورشید احمدی

---

۱)

$$f(x)=y=\frac{3x-1}{2} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

$B\begin{vmatrix}0\\ \frac{1}{3}\end{vmatrix}$, $A\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}0\\ 0\end{vmatrix}$

۲

---

۲) الف) $x^2-2x+3 \quad x\in[1,+\infty) \rightarrow \frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow$ یک به یک است

$$f(x)=y=x^2-2x+3-2+2 \Rightarrow y=(x-1)^2+2 \rightarrow y-2=(x-1)^2$$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{y-2}+1=x \Rightarrow y=1\pm\sqrt{x-2} \xrightarrow[\Rightarrow R=[2,+\infty)]{x\in[1,+\infty)} \Rightarrow y=1+\sqrt{x-2}\ ;\ x\in[2,+\infty)$$

۲

ب) $x^2-2x+3 \quad x\in(3,+\infty) \rightarrow 3>\frac{-b}{2a}=1 \Rightarrow$ یک به یک است

تابع معکوس $\rightarrow y=1+\sqrt{x-2}\ ;\ x\in(6,+\infty)$

---

۳)

$$f(x)=2x-\sqrt{16-16x+4x^2}=2x-2\sqrt{(x-2)^2}=2x-2|x-2|$$

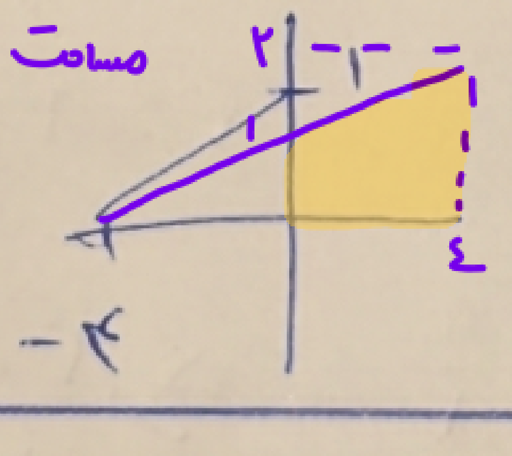
۱/۵

در دامنه $D_f=?$ ، $f(x)$ وارون پذیر است

$$\begin{cases} x>2 & 2x-2x+4 \quad \times \text{ یک به یک نیست} \\ x<2 & 2x+2x-4=4x-4 \rightarrow \text{ یک به یک است} \end{cases} \quad , D_f=x\in(-\infty,2]$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{4}$$

مساحت با سمت + محور x ها را می‌خواهد.



$$\Rightarrow S=4\times1\times\frac{1}{2}=2$$

$$S=\frac{4(1+2)}{2}=6$$

---

۴) برای یک به یک بودن

$$\begin{cases}x_1, y\\ x_2, y\end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5}=\frac{x_2^2}{x_2^2-5}$$

۲

$$\Rightarrow \cancel{x_1^2x_2^2}-5x_1^2=\cancel{x_2^2x_1^2}-5x_2^2 \Rightarrow x_2^2=x_1^2 \xrightarrow[\text{هم علامتند}]{x_2, x_1} x_2=x_1 \Rightarrow \text{ یک به یک است}$$

$$\xrightarrow{\text{تابع معکوس } f} y^2=\frac{x^2}{x^2-5} \rightarrow y^2(x^2-5)=x^2 \Rightarrow x^2(y^2-1)=5y^2 \Rightarrow y^2=\frac{5x^2}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow y=\pm x\sqrt{\frac{5}{x^2-1}} \xrightarrow{\text{تابع اصلی هم علامت } x \text{ است}} y=x\sqrt{\frac{5}{x^2-1}}$$

۵)

$$g(x)=\begin{cases} x^2-4x+k & ; x\geq 2 \\ -x^2+6x+3k & ; x<2 \end{cases}$$

۲

$\Rightarrow \xrightarrow{x=2} 4-8+k=k-4 \;/\; \xrightarrow[-x^2+6x+3k]{x<2} \dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-6}{-2}=3 ,\; \xrightarrow{x<2}$

$-4+12+3k=3k+8 \xrightarrow{\text{g صعودی است}}$ $\quad 3k+8<k-4 \Rightarrow 2k<-12$

$\Rightarrow \underline{k<-6}$

---

۶)

$$f(x)\begin{cases} 4x & x\geq 0 \\ 2x & x<0 \end{cases} \longrightarrow f^{-1}(x)\begin{cases} \dfrac{x}{4} & x\geq 0 \\ \dfrac{x}{2} & x<0 \end{cases}$$

۲

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x}{8}-\frac{1}{8}|x| \Rightarrow a=\frac{3}{8},\; b=-\frac{1}{8} \Rightarrow ab=\frac{-3}{64}$$

---

۷)

$f(x)=\dfrac{3x+4}{x+m}$, $A\Big|^{2}_{-10}$ تابع می‌گذرد $\Rightarrow \dfrac{10}{2+m}=-10 \Rightarrow \underbrace{m=-3}$

$f^{-1}(x)=\dfrac{3x+4}{x-3} \Longrightarrow \underbrace{\cancel{f\circ f^{-1}}}_{x}+f^{-1}(x)=x+f^{-1}(x)$ ۲

$x+\dfrac{3x+4}{x-3}=\dfrac{x^2-\cancel{3x}+\cancel{3x}+4}{x-3}=\dfrac{x^2+4}{x-3}=x \Rightarrow \cancel{x^2}+4=\cancel{x^2}-3x$

$\Rightarrow \boxed{x=-\dfrac{4}{3}}$

---

۸)

$f(3-2x)=-2 \rightarrow f^{-1}(-2)=3-2x$, $g^{-1}(4) \Rightarrow$

۲

$4=g(\frac{x}{2}) \Rightarrow g^{-1}(4)=\frac{x}{2} \Rightarrow 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=4\times\frac{x}{2}+3-2x$

$=3$

$=3$

---

۹)

$y=\dfrac{5x-13}{1-x} \xrightarrow[\text{۳ واحد پایین}]{\text{۲ واحد راست}} \dfrac{2x+6}{x-1}=f(x)$, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+6}{x-2}$

$\dfrac{2x+6}{x-1}=\dfrac{x+6}{x-2} \Rightarrow x^2-3x-6=0 \xrightarrow{\text{مجموع نقاط برخورد}} =3$ ۲

---

۱۰) راه حل پاسخ

$f(x)=y=x+4[x]$, $\underset{=g(x)}{f^{-1}(x)} \Rightarrow y+4[y]=x \rightarrow y=x-4[y]$ ۱

$\xrightarrow{y=x+4[x]} y=x-4[x+4[x]] \Rightarrow y=x-20[x]$

$\Rightarrow f-g(x)=x+4[x]-x+20[x]=\boxed{24[x]}$

سوال ۱۰

$$[y] = [x] + 4[x] \longrightarrow [x] = \frac{[y]}{5}$$

$$f^{-1}(x) = g(x) = x - \frac{4}{5}[x]$$

$$f - g = x + 4[x] - x + 0.8[x] = 4.8[x]$$