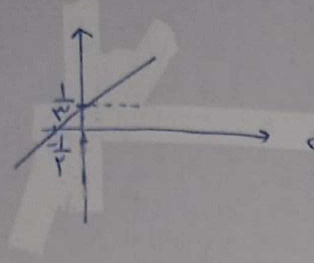
نام و نام خانوادگی: دلارام میرزاباقریان ...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ۱۰ ...... کلاس دوازدهم دختر B ......

۱

$2y = 3x - 1 \longrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{وارون}} y + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x \longrightarrow \frac{2}{3}\left(y+\frac{1}{2}\right) = x$

$\frac{2}{3}y + \frac{2}{6} = x$

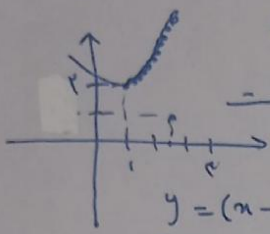
$\boxed{y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}$



$\boxed{S = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{8}}$

۲

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [1, +\infty) \curvearrowright y = \sqrt{x-2} + 1$



$S|_2^1$

یک به یک است

$x = \sqrt{y-2} + 1 \quad D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

$x - 1 = \sqrt{y-2}$

$D = [1, +\infty)$, $x - 1 \geq 0$

$|x-1| = \sqrt[2]{y-2}$

$y = (x-1)^2 + 2$

$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + 2 = y \to y - 2 = (x-1)^2$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [3, +\infty)$

با توجه به شکل قبلی یک به یک است.

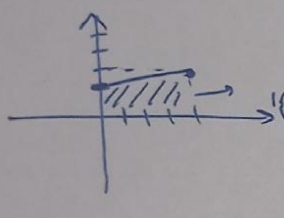
۳

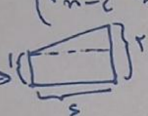
$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} \longrightarrow \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = \sqrt{4(x-2)^2} \longrightarrow 2|x-2|$

$f(x) = 2x - 2|x-2| \begin{cases} 4 & x \geq 2 \to \text{یک به یک ✗} \\ 4x - 4 & x < 2 \to \text{یک به یک ✓} \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{وارون}} y = 4x - 4 \to y + 4 = 4x$

$x = \frac{y+4}{4}$





$(4 \times 1) + \left(\frac{4 \times 1}{2}\right) = \boxed{6}$

$\frac{x}{4} + 1 \leftarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4}$

$x < 4$

۴

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \xrightarrow{\text{x و y هم علامت}}$ $\boxed{y^{-1} = x\sqrt{\frac{5}{x^2-1}}}$ پس x و y باید هم علامت باشند

$x = \pm|y|\sqrt{\frac{5}{y^2-1}}$ غلط

D: $x^2 - 5 > 0 \to x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

مقادیر منفی — مقادیر مثبت

پس یک به یک است

$\xrightarrow{\text{وارون}} y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 5} \to y^2(x^2 - 5) = x^2$

$\to x = \pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}}$

برد تابع $\to \lim_{x \to \sqrt{5}^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1^+$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1^- \quad \lim_{x \to -\sqrt{5}^-} f(x) = -\infty$

دامنه‌ی وارون $\to R = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

۵

$g(x) \begin{cases} x^2 - 4x + k & x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3k & x < 2 \end{cases}$

اگر بخواهیم تابع یک به یک باشد باید هر دو ضابطه در $x=2$ یک مقدار بدهند (برای جلوگیری از ۲ مقدار تکراری)

$(2)^2 - 4(2) + k = -(2)^2 + 6(2) + 3k$

$4 - 8 + k = -4 + 12 + 3k$

$2k = -12 \to k = -6$

۶

$$f(x)\begin{cases}۴x & x\geq ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases} \longrightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴}x & x\geq ۰\\ \frac{۱}{۲}x & x<۰\end{cases}$$

$$a\times b \to \frac{۳}{۸}\times\left(-\frac{۱}{۸}\right)=\boxed{-\frac{۳}{۶۴}}$$

$$g(x)=ax+b|x|$$

میانگین / درجه $\to a \to \dfrac{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۲}=\boxed{\frac{۳}{۸}} \xrightarrow{\text{نقطه } (۱,\frac{۱}{۴})} \frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۸}+b|۱| \Rightarrow b=\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۸}=\boxed{-\frac{۱}{۸}}$

۷

$$f(x)=\frac{۳x+۴}{x+\underbrace{m}_{-۳}} \to (۲,-۱۰) \to -۱۰=\frac{۳(+۲)+۴}{۲+m} \to ۲۰+۱۰m=-۱۰ \to ۱۰m=-۳۰,\ \boxed{m=-۳}$$

$$y=f\circ f^{-1}(x)+f^{-1}(x) \to y=x+f^{-1}(x)$$

$$\underbrace{f^{-1}(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳}}_{\text{خودش}} \xrightarrow[\text{و سوم}\ x=y]{\text{نیمساز ناحیه اول}} x=x+\underbrace{f^{-1}(x)}_{\text{صفر}} \to \frac{۳x+۴}{x-۳}=۰ \to \boxed{x=-\frac{۴}{۳}}$$

۸

$$f(۳-۲x)=۲-g\left(\frac{x}{۲}\right) \qquad ۴g^{-1}(۴)+f^{-1}(-۲)=?$$

$$\left.\begin{aligned}&f(a)=-۲\\ *&f^{-1}(-۲)=a\end{aligned}\right\} \to \underbrace{a=(۳-۲x)}_{x=\frac{۳-a}{۲}} \to -۲=۲-g\left(\frac{x}{۲}\right) \to g\left(\frac{x}{۲}\right)=۴ \to g\left(\frac{۳-a}{۴}\right)=۴$$

$$\hookrightarrow \frac{۳-a}{۴}=g^{-1}(۴)\ *$$

$$\left.\begin{aligned}&f^{-1}(-۲)=a\\ &g^{-1}(۴)=\frac{۳-a}{۴}\end{aligned}\right\} \cancel{۴}\left(\frac{۳-a}{\cancel{۴}}\right)+a=\boxed{۳}$$

۹

$$y=\frac{۵x-۱۳}{۱-x} \xrightarrow[\text{به مبدا}]{\text{قرینه نسبت}} -y=\frac{-۵x-۱۳}{۱+x} \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} -y=\frac{-۵(x-۲)-۱۳}{۱+x-۲} \to y=\frac{۵x+۳}{x-۱}$$

$$\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۳ واحد}} y=\frac{۵x+۳}{x-۱}-۳ \to \frac{۵x+۳-۳x+۳}{x-۱}=\frac{۲x+۶}{x-۱}=f(x) \to f^{-1}(x)=\frac{۱x+۶}{x-۲}$$

$$\frac{۲x+۶}{x-۱}=\frac{x+۶}{x-۲} \to x^۲+۵x-۶=۲x^۲+۲x-۱۲ \to x^۲-۳x-۶=۰$$

$$\text{مجموع}=\frac{-b}{a}=۳$$

۱۰

$$f(x)=x+۴[x] \xrightarrow[x=y\ \text{به}]{\text{قرینه نسبت}} g(x) \to g(x)=f^{-1}(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$$

$$x=y+۴[y] \longrightarrow [x]=[y+۴[y]] \to [x]=۵[y] \qquad [y]=\frac{[x]}{۵}$$

$$\hookrightarrow x+۴[x]-x+\frac{۴[x]}{۵}=\frac{۲۴[x]}{۵}$$