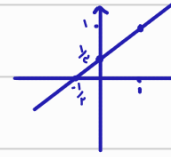


سوال ۱)



$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$2y = 3n - 1 \xrightarrow{\text{داریم}} 2n = 3y - 1 \rightarrow y = \frac{2n+1}{3} \rightarrow \frac{2n+1}{3} = 0 \rightarrow 2n+1=0 \rightarrow n = -\frac{1}{2}$$

سوال ۲)

از انتخابی که دامنه کمی به یک طرف کمی یعنی از رأس کمی به بعد حدود صد تا یک به یک است $\rightarrow \frac{y}{x} = 1 \rightarrow$ طول رأس کمی $y = x^2 - 2n + 3, x \in [1, +\infty)$

$$\xrightarrow{\text{داریم}} x = y^2 - 2y + 1 + 2 \rightarrow x = (y-1)^2 + 2 \rightarrow (y-1)^2 = x-2 \rightarrow y-1 = \pm\sqrt{x-2} \rightarrow y = \sqrt{x-2} + 1 \quad x \geq 2$$

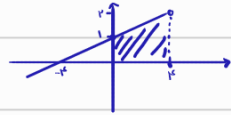
این تابع نیز به یک است زیرا فقط به طرف تابع دو مثال $\rightarrow$ در رأس کمی برای این بازه نیست $y = x^2 - 2n + 3, x \in [2, +\infty)$

$$\xrightarrow{\text{داریم}} x = y^2 - 2n + 1 + 2 \rightarrow x = (y-1)^2 + 2 \rightarrow (y-1)^2 = x-2 \rightarrow y-1 = \pm\sqrt{x-2} \rightarrow y = \sqrt{x-2} + 1 \quad x \geq 4$$

سوال ۳)

$$f(n) = 2n - \sqrt{4n - 4n(2-n)} = 2n - \sqrt{4n^2 - 4n + 4n} = 2n - \sqrt{(2n-2)^2} = 2n - |2n-2| \rightarrow f(n) = \begin{cases} 4 & n \geq 2 \\ 2n-2 & n < 2 \end{cases}$$

$$y = 4n - 2 \xrightarrow{\text{داریم}} x = 4y - 2 \rightarrow y = \frac{x+2}{4} \quad x \in \mathbb{R}$$



$$S = \frac{(1+2) \times 2}{2} = 3$$

سوال ۴)

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \rightarrow 0 < y \Rightarrow x^2-5 > 0 \rightarrow x^2 > 5 \rightarrow D_y = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$$

$$\xrightarrow{\text{بررسی به یک بودن}} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \times \frac{\sqrt{x_1^2-5} \cdot \sqrt{x_2^2-5}}{\sqrt{x_1^2-5} \cdot \sqrt{x_2^2-5}} \rightarrow x_1 \sqrt{x_2^2-5} = x_2 \sqrt{x_1^2-5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x_1^2 x_2^2 - 5x_1^2 = x_2^2 x_1^2 - 5x_2^2$$

$$5x_1^2 = 5x_2^2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1 = \pm x_2$$

بنابراین باید حالت $x_1 = -x_2$ را بررسی کنیم پس برای دامنه است

$$f(n_1) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} \quad f(-n_1) = \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = -f(n_1)$$

پس نتیجه می گیریم $f(n_1) \neq f(-n_1)$

تغییر صورتی $f(n_1) = f(-n_1)$ که $f(n_1) = 0$ شود که این حالت در صورتی رخ می دهد که صورت کسر صفر باشد $(n_1 = 0)$ ولی ۰ در دامنه تابع ما

وجود ندارد بنابراین این تابع یک به یک است.

$$\xrightarrow{\text{حلوس تابع}} x = \frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \rightarrow x \sqrt{y^2-5} = y \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 y^2 - 5x^2 = y^2 \rightarrow x^2 y^2 - y^2 = 5x^2$$

$$\rightarrow y^2(x^2-1) = 5x^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}} \xrightarrow{\text{از انتخابی که در تابع اولی و دوم هم علامت داشته پس باید حالت مثبت را انتخاب کنیم}} y = \frac{\sqrt{5x^2}}{\sqrt{x^2-1}} \quad (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$g(n) = \begin{cases} x^2 - 4n + k & n \geq 2 \quad R = [k-4, +\infty) \\ -x^2 + 4n + 3k & n < 2 \quad R = (-\infty, 3k+1) \end{cases}$$

سوال ۵) هر سمت تابع $g(n)$ به تقاطع یک به یک است زیرا هر دو به یک سمت یک به یک تابع حدود صد تا

حالا ما باید بر هر سمت را حساب کنیم برای اینکه $g(n)$ و در کل یک به یک باشد باید بر دهمای

$$(-\infty, 3k+1) \cap [k-4, +\infty) \Rightarrow 3k+1 \leq k-4 \rightarrow 2k \leq -12 \rightarrow k \leq -6$$

که به است اگر در هم با هم اشتراک داشته باشند

سوال ۶) $f(n) = 3n + |n|$ $f^{-1}(n) = an + b|n|$ $f(n) = \begin{cases} 4n & n \geq 0 \\ 2n & n < 0 \end{cases} \rightarrow$ تابع یک به یک است

$$f^{-1} = \begin{cases} \frac{n}{4} & n \geq 0 \\ \frac{n}{2} & n < 0 \end{cases} \rightarrow f^{-1} = \frac{3n - |n|}{\wedge} \Rightarrow f^{-1} = \left(\frac{3}{\wedge}\right)n - \left(\frac{1}{\wedge}\right)|n| \Rightarrow ab = \frac{3}{\wedge} \times \left(-\frac{1}{\wedge}\right) = -\frac{3}{4\wedge}$$

سوال ۷) $f(n) = \frac{3n+2}{n+m}$ $(1, -1) \rightarrow \frac{3(1)+2}{1+m} = -1 \rightarrow 10 = -20 - 10m \Rightarrow 10m = -30 \rightarrow m = -3$

این تابع معکوس با خودش یک به یک یعنی $f^{-1}(n) = f(n)$

$$f \circ f^{-1}(n) + f^{-1}(n) = n \Rightarrow n + f(n) = n \rightarrow f(n) = 0 \Rightarrow \frac{3n-2}{n-2} = 0 \rightarrow 3n-2 = 0 \rightarrow n = \frac{2}{3}$$

سوال ۸) $f(3-2n) = 2 - g\left(\frac{n}{2}\right)$ $fg^{-1}(2) + f^{-1}(-2) = 2t + 3-2t = 3$

$$g^{-1}(2) = t \rightarrow g(t) = 2 \rightarrow \frac{n}{2} = t \rightarrow n = 2t / f(3-2(2t)) = 2 - g\left(\frac{2t}{2}\right) \rightarrow f(3-4t) = -2 \rightarrow f^{-1}(-2) = 3-4t$$

سوال ۹) $y = \frac{5n-12}{1-n}$ قرینه نسبت به مبدأ $y = \frac{5n+12}{1+n}$ در دایره یکتا $y = \frac{5(n-2)+12}{1+n-2} = \frac{5n-10+12}{n-1} = \frac{5n+2}{n-1}$ در دایره یکتا

$$\frac{5n+2}{n-1} - 3 = \frac{5n+2-3n+3}{n-1} = \frac{2n+5}{n-1} = f(n) \quad f^{-1}(n) = \frac{n+4}{n-2} \quad f(n) = f^{-1}(n) \Rightarrow$$

$$\frac{2n+5}{n-1} = \frac{n+4}{n-2} \Rightarrow 2n^2+2n-12 = n^2+5n-4 \Rightarrow n^2-3n-4 = 0 \quad 3 = \text{جمع ریشه ها}$$

سوال ۱۰) $f(n) = n + 2[n]$ از دو طرف برابری $[y] = [n + 2[n]] = 2[n]$

$$y = n + 2 \frac{[y]}{2} \rightarrow n = y - \frac{[y]}{2} \xrightarrow{\text{دو طرف ضرب}} y = n - \frac{[n]}{2}$$

$$(f \circ g)(n) = n + 2[n] - n + \frac{[n]}{2} = \frac{5}{2}[n]$$