سازینا ستاری — تکلیف شماره ۱

①

الف) $y^3=2x^2+2x-1$

$$\left.\begin{aligned}y_1^3&=2x^2+2x-1\\ y_2^3&=2x^2+2x-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow y_1^3=y_2^3\Rightarrow y_1=y_2$$

تابع است

ب) $x\cos y=y\cos x \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \frac{\pi}{2}\cos y=0\Rightarrow \cos y=0\Rightarrow y=\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

ج) $\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}\Rightarrow x+y-2\sqrt{xy}=0\Rightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y}$

د) $xy^2+2x-y^3-2y=0\Rightarrow y_1^3-xy_1^2+2y_1=2x$

$y_2^3-xy_2^2+2y_2=2x$

$\Rightarrow y_1^3-y_2^3+2y_1-2y_2-x(y_1^2-y_2^2)=0$

$=(y_1-y_2)\underbrace{(y_1^2+y_2^2+y_1y_2+2-x(y_1+y_2))}_{=0}$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{(y_1-x)^2-4(y_2^2+2-xy_2)}$ ← ریشه ندارد ← $y_1=y_2$ ← تابع است.

---

②

$|x-1|\geq 2\Rightarrow x-1\geq 2\Rightarrow x\geq 3$

$|x-1|\leq -2\Rightarrow x-1\leq -2\Rightarrow x\leq -1$

چون تابع است ⇐ به ازای $x=-1$ ⇐ $a-2=2-b$

$\Rightarrow \boxed{a+b=4}$

---

③

$-x^2-bx+a\geq 0\Rightarrow x^2+bx-a\leq 0$

b		a	
+	−	+	

$\Rightarrow D_f=[b,a]$

b و a ریشه‌های معادله

$$\left.\begin{aligned}a+b&=-b\Rightarrow a=-2b\\ a\times b&=-a\Rightarrow b=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=2$$

$a+b=2+(-1)=1$

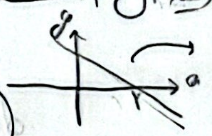
---

④

عبارت زیر را که یک عبارت درجه یک است و ریشه‌ی آن ۲ است: $a=0$

$bx+c=0$

$\Rightarrow x=\frac{-c}{b}=2\Rightarrow 2b=-c$



$b<0\Rightarrow |b|=-b$

$3a+c-3|b|=0-2b+3b=b$

---

⑤

الف) $|x|-[x]\neq 0\Rightarrow |x|=[x]\Rightarrow x\in Z,\ x\geq 0$ $\quad\boxed{x\in Z^+\cup\{0\}}$

ب) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=9\Rightarrow\sqrt{y}=9-\sqrt{x}\Rightarrow 9-\sqrt{x}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x}\leq 9\Rightarrow\boxed{x\leq 81}$

⑥

الف) $3x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{3}$ ①

$x>0 \ , \ x\neq 1$ ②

$\log_x^{3x-1} \geq 0 \overset{x>1 \ ④}{\Longrightarrow} 3x-1\geq 1 \Rightarrow x\geq \frac{2}{3}$ ③

$\log_x^{3x-1} \geq 0 \overset{0<x<1 \ ⑤}{\Longrightarrow} 3x-1\leq 1 \Rightarrow x\leq \frac{2}{3}$ ⑥

$① \cap ② \cap ③ \cap ④ = (1,+\infty)$

$① \cap ② \cap ⑤ \cap ⑥ = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ $\overset{\cup}{\Longrightarrow}$ $\boxed{D=(1,+\infty)\cup(\frac{1}{3},\frac{2}{3})}$

ب) $\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}>0 \Rightarrow 6+\sqrt{|x|}-|x|>0$, $t=\sqrt{|x|}$ $\Rightarrow -t^2+t+6>0 \Rightarrow t^2-t-6<0$

$\Rightarrow (t-3)(t+2)<0$

	-2		3	
$+$		$-$		$+$

$\hookrightarrow -2<\sqrt{|x|}<3 \Rightarrow \sqrt{|x|}<3$

$\Rightarrow |x|<9 \Rightarrow \boxed{-9<x<9}$

---

⑦ از آنجا که ۲ در بازه دامنه وجود ندارد پس ریشه مخرج است و $\boxed{b=-2}$

---

⑧

$f(x)-x+1\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq x-1$

$[x]>4 \Rightarrow x\geq 5$ ① $\Rightarrow 2x-1\geq x-1 \Rightarrow x\geq 0$ ② $\Rightarrow ①\cap② = x\geq 5$

$[x]\leq 4 \Rightarrow x<5$ ③ $\Rightarrow 4x+3\geq x-1 \Rightarrow x\geq \frac{-4}{3}$ ④ $\Rightarrow ③\cap④ = \boxed{-\frac{4}{3}\leq x<5}$

---

⑨

$(4x^2+4x+1)^2\neq 0 \Rightarrow 4x^2+4x+1\neq 0 \Rightarrow (2x+1)^2\neq 0 \Rightarrow 2x+1\neq 0 \Rightarrow \boxed{x\neq -\frac{1}{2}}$

صورت: $3(8x^3+12x^2+6x+1) = 3(2x+1)^3$ 　 $\frac{3(2x+1)^3}{(2x+1)^4} = \boxed{\frac{3}{2x+1}}$

---

⑩

$2x-a>0 \Rightarrow x>\frac{a}{2}$

$1-\log^{2x-a}\geq 0 \Rightarrow \log^{2x-a}\leq 1 \Rightarrow 2x-a\leq 10 \Rightarrow x\leq \frac{10+a}{2}$ $\Bigg\} \Rightarrow \frac{a}{2}<x\leq \frac{10+a}{2}$

$\Rightarrow \frac{a}{2}=b$, $\frac{10+a}{2}=c$ 　 $c-b=\frac{10+a}{2}-\frac{a}{2}$

$=\boxed{5}$