تکلیف شماره ۱ «به نام خدا» ۱۹,۵ مهشید حیدری

۱- (۲)

الف) $y^3-2x^2=2x-1$

تعریف تابع $\Rightarrow \begin{cases}(x,y_1)\in f\\(x,y_2)\in f\end{cases} \longrightarrow y_1=y_2$ $\quad \begin{cases}y_1^3=2x^2+2x-1\\y_2^3=2x^2+2x-1\end{cases} \longrightarrow y_1^3=y_2^3 \Rightarrow \boxed{y_1=y_2}$

پس تابع است ✓ ✓

ب) $x\cos y=y\cos x \longrightarrow$ نقض: $x=\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}\cos y=0 \longrightarrow \cos y=0$

$y=\{k\pi+\frac{\pi}{2}\} \longrightarrow$ پس تابع نیست ✓

ج) $\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}\ ,\ x,y>0 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^2+y^2+2xy=4xy$

$\longrightarrow x^2+y^2-2xy=0 \quad (x-y)^2=0 \longrightarrow \boxed{x=y}$ تابع همانی است $\Rightarrow$ در نتیجه تابع است ✓

د) $xy^2+2x-y^3-2y=0$

از تعریف تابع: $\begin{cases}y_1^3+2y_1-xy_1^2=2x\\y_2^3+2y_2-xy_2^2=2x\end{cases}$ از دو معادله حاصل

$\Rightarrow (y_1-y_2)\underbrace{(y_1^2+y_2^2+y_1y_2+2-x(y_1+y_2))}_{\text{فی‌نفسه عبارت به جای دارد}}=0$

$\longrightarrow y_1=y_2 \Rightarrow$ پس عبارت تابع است ✓

۲- (۲)

$f(x)=\begin{cases}2x^2-b\ ,\ |x-1|\geq 2\\ a+2x\ ,\ -3\leq x\leq -1\end{cases}$ $\quad a+b=?$

$|x-1|\geq 2 \longrightarrow x-1\geq 2 \longrightarrow x\geq 3$

$\qquad\qquad\quad\ \longrightarrow x-1\leq -2 \longrightarrow x\leq -1$

$x=-1 \longrightarrow 2-b=a-2$

برای تابع بودن باید هردو ضابطه به ازای -1 اعداد یکسانی بدهند

و اعداد مشترک در دامنه

$\boxed{a+b=4}$ ✓

۳- (۲)

$f(x)=\sqrt{a-bx-x^2}\quad D_f=[b,a]\quad a+b=?\quad a\neq 0\ ,\ b\in\mathbb{Z}$

یعنی a و b ریشه‌های عبارت زیر رادیکال اند

$\frac{c}{a}=ab$ ضرب ریشه‌ها $\longrightarrow \frac{a}{-1}=\frac{ab}{1} \longrightarrow a=-ab \longrightarrow b=-1$ ✓

$\frac{-b}{2a}=a+b$ جمع ریشه‌ها $\longrightarrow \frac{+b}{-1}=a+b \xrightarrow{b=-1} \frac{-1}{-1}=\frac{a-1}{1} \longrightarrow a-1=1 \longrightarrow a=2$ ✓

$\longrightarrow a+b=1$ ✓

مهشید جدیدی

۴- ۲

$y=\dfrac{2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $\quad D_y=(-\infty,+2)$ $\quad 3a+c-3|b|=$

باتوجه به دامنه تابع می‌توان متوجه شد که عبارت زیر رادیکال درجه ۲ نبوده چون در آن صورت دو ریشه یا یک ریشه مضاعف داشت پس $c=$ $a=0$

بازه پیوسته است

$a=0 \Rightarrow bx+c>0 \Rightarrow b<0 \;,\; x<-\dfrac{c}{b}$

$-\dfrac{c}{b}=2 \to c=-2b \longrightarrow 3a+c-3|b|=0-2b+3b=b$

۵- ۲

الف) $F(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{|x|-[x]}} \to |x|-[x]\neq 0 \quad |x|\neq[x]$

تاثیری ندارد

$D_f=\mathbb{R}-\mathbb{N}$ $\quad \mathbb{R}-\{0,1,2,3,\dots\}$

ب) $F(x)=\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \longrightarrow \sqrt{x} \Rightarrow x\geq 0$

$\underbrace{\sqrt{y}}_{+}=\underbrace{9-\sqrt{x}}_{+} \Rightarrow 9-\sqrt{x}\geqslant 0 \to \sqrt{x}\leq 9 \to x\leq 81$

$\xrightarrow{\cap} D_f=[0,81]$

۶- ۱,۷۵

الف) $F(x)=\sqrt{\log_x^{3x-1}} \longrightarrow 3x-1>0 \to 3x>1 \to x>\dfrac{1}{3}$

$\to x>0 \;,\; x\neq 1$

$\log_x^{3x-1}\geqslant 0 \to x>1 \to 3x-1\geqslant 1 \to 3x\geqslant 2 \to x\geqslant \dfrac{2}{3}$

$\to 0<x<1 \to 3x-1\leq 1 \to 3x\leq 2 \to x\leq\dfrac{2}{3}$

$\xrightarrow{\cap} D_f=[\dfrac{2}{3},+\infty)-\{1\}$

$0<3x-1\leq x^0 \to x\leq\dfrac{2}{3}$ $\qquad D_f=(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}]\cup(1,+\infty)$

ب) $F(x)=\log\dfrac{1}{4+\sqrt{|x|}-|x|}>0 \longrightarrow 4+\underbrace{\sqrt{|x|}}_{m}-|x|>0$

$D_f=(-9,9)$

$-m^2+m+4>0 \longrightarrow -(m-3)(m+2)>0 \longrightarrow \sqrt{|x|}<3 \to |x|<9 \quad -9<x<9$

۷- ۱,۷۵

$y=\sqrt{\dfrac{3x+2}{x+b}+a}$ $\qquad D_y=(2,+\infty)$

$2\notin D_y \longrightarrow$ ۲ ریشه مخرج بوده است $\longrightarrow (x-2) \Rightarrow b=-2$

$\longrightarrow a<0 \longrightarrow \dfrac{3x+2}{x+b}=0 \to 3x+2=0 \to x=-\dfrac{2}{3}\neq 2 \to$ غ‌ق‌ق

ریشه‌ی صورت باید از بین برود $\to a=-3$

حسین جبری

۸- ②

$$F(x)=\begin{cases} 2x-1 \ ; & [x]\geq 5 \rightarrow x\in[5,+\infty) \\ 4x+3 \ ; & [x]\leq 4 \rightarrow x\in(-\infty,5) \end{cases}$$

$y=\sqrt{2x-1}\ -x+1=\sqrt{x}\geq 0 \rightarrow x\geq 5$

$y=\sqrt{4x+3-x+1}=x\geq -\frac{4}{3} \rightarrow -\frac{4}{3}\leq x<5$

$\rightarrow D_f=[-\frac{4}{3},+\infty)$ ✓

۹- ②

$$y=\frac{24x^3+36x^2+18x+3}{(4x^2+4x+1)^2}\ \ (4x^2+4x+1)^2\rightarrow((2x+1)^2)^2 \longrightarrow \frac{3(8x^3+12x^2+6x+1)}{(2x+1)^4}=\frac{3(2x+1)^3}{(2x+1)^4}=$$ ✓

$\frac{3}{2x+1} \Rightarrow x\neq -\frac{1}{2} \qquad D_y=\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$ ✓

۱۰- ②

$y=\sqrt{1-\log^{2x-a}} \longrightarrow 2x-a>0 \rightarrow x>\frac{a}{2}$

$D_y=\underset{b}{\frac{a}{2}}<x\leq\underset{c}{\frac{10+a}{2}}$

$1-\log^{2x-a}\geq 0 \rightarrow \log^{2x-a}\leq 1 \rightarrow 2x-a\leq 10 \rightarrow x\leq\frac{10+a}{2}$

$c-b=\frac{10+a-a}{2}=5$ ✓