1 تابع بودن بررسی کنید

الف) $y^3 - 2x^2 = 2x - 1$

$y^3 = 2x^2 + 2x - 1$ تابع هست

ب) $x\cos y = y\cos x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos y = y \times 0 = 0 \qquad \frac{\pi}{2}\cos y = 0$

$\cos y = 0 \rightarrow y = \frac{\pi}{2}, \; y = \frac{3\pi}{2}$ تابع نیست!

ج) $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} \qquad x + y - 2\sqrt{xy} = 0 \qquad (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0 \qquad \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$

$x = 0 \;,\; y = 0$ تک نقطه $(0,0)$ که تابع است!

د) $xy^2 + 2x - y^3 - 2y = 0$

$\xrightarrow{x=0} y^3 + 2y = 0 \qquad y(y^2+2) = 0 \longrightarrow y = 0$

$y_1^3 + 2y_1 = y_2^3 + 2y_2 \xrightarrow{x_1 = x_2} y_1^3 - y_2^3 = 2(y_2 - y_1)$

$(y_1 - y_2)(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) + 2(y_1 - y_2) = 0$

$(y_1 - y_2)\underbrace{(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 + 2)}_{\text{همواره مثبت}} = 0 \longrightarrow y_1 = y_2$ تابع هست!

2 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & |x-1| \geq 2 \\ a + 2x & -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$ ، $a + b$ ؟

$|x - 1| \geq 2$

$x \geq 3 \quad x \leq -1$

$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & x \geq 3 \text{ یا } x \leq -1 \\ a + 2x & -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$

$\xrightarrow{x=-1} a - 2 = 2 - b$

$a + b = 4$

3 دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{a - bx - x^2}$ بازه‌ی $[b, a]$ است. $a + b$ ؟

$a - bx - x^2 \geq 0 \qquad x^2 + bx - a \leq 0$

$S = \alpha + \beta = a + b = -b \qquad 2b = -a$

$P = \alpha\beta = ab = -a \qquad b = -1 \qquad a = 2$

$a + b = 2 + (-1) = 1$

۴ دامنه $y=\dfrac{۲}{\sqrt{ax^۲+bx+c}}$ برابر بازه‌ی $(-\infty,۲)$. حاصل $۳a+c-۳|b|$ برحسب b

$$ax^۲+bx+c=(x-۲)(-x+۲)=-x^۲+۴x-۴ \qquad b=۴,\ a=-۱,\ c=-۴$$

$$۳a+c-۳|b|=-۳-۴-۱۲=-۱۹$$

$$b=۴ \rightarrow ۳a+c-۳|b|=-۵b+۱$$

---

۵ دامنه توابع را

الف) $f(x)=\sqrt[۳]{\dfrac{۱}{x-[x]}} \Rightarrow x-[x]\neq ۰ \quad x\notin \mathbb{Z}$

$D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

ب) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{y}=۹ \qquad \sqrt{y}=۹-\sqrt{x} \qquad y=۸۱+x-۱۸\sqrt{x}$

$x\geq ۰ \qquad D_f=[۰,+\infty)$

---

۶ دامنه توابع را

الف) $f(x)=\sqrt{\log_x^{۳x-۱}} \longrightarrow ۳x-۱>۰ \quad x>\frac{۱}{۳}\ \mathrm{I}$

$\log_x^{۳x-۱}\geq ۰ \qquad ۳x-۱\geq ۱ \qquad ۳x\geq ۲ \qquad x\geq \frac{۲}{۳}\ \mathrm{II}$

$\mathrm{I}\cap\mathrm{II} \qquad D_f=[\frac{۲}{۳},+\infty)$

ب) $f(x)=\log \dfrac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|} \qquad \dfrac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}>۰ \qquad ۶+\sqrt{|x|}-|x|<۰$

$|x|-\sqrt{|x|}>۶ \qquad D_f=\mathbb{R}-\{[-۹,۹]$

---

۷ دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{\dfrac{۳x+۲}{x+b}+a}=(۲,+\infty)$. b را

$$y=\sqrt{\frac{۳x+۲+ax+ab}{x+b}}=\sqrt{\frac{(۳+a)x+ab+۲}{x+b}} \qquad \boxed{b=-۲}$$

چون بازه باز است پس "۲" ریشه‌ی مخرج بوده است.

---

۸ دامنه تابع $y=\sqrt{f(x)}-x+۱$ را

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & [x]>۴\\ ۴x+۳ & [x]\leq ۴\end{cases}$$

$\forall\,[x]>۴ \qquad ۲x-۱-x+۱=x \quad ✓ \qquad D_f=[-۱,+\infty)$

$\forall\,[x]\leq ۴ \qquad ۴x+۳-x+۱=۳x+۴ \qquad ۳x+۴\geq ۰ \qquad x\geq \frac{-۴}{۳} \qquad [x]\geq -۱$

۹

$$y = \frac{24x^3+36x^2+18x+3}{(4x^2+4x+1)^2} = \frac{3(8x^3+12x^2+6x+1)}{(2x+1)^4}$$

$$\frac{3(2x+1)^3}{(2x+1)^4} = \frac{3}{2x+1} \qquad y = \frac{3}{2x+1} \qquad 2x+1 \neq 0 \qquad x \neq \frac{-1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$$

۱۰

$$y = \sqrt{1-\log(2x-a)} \qquad 2x-a > 0 \qquad x > \frac{a}{2}$$

$$1-\log(2x-a) \geq 0 \qquad \log(2x-a) \leq 1 \qquad 2x-a \leq 10 \qquad 2x \leq 10+a$$

$$x \leq \frac{10+a}{2}$$

$$b < x \leq c$$

$$\frac{a}{2} < x \leq \frac{10+a}{2} \qquad c-b = \frac{10+a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{10}{2} = 5$$