تمرین فصل ۲ / فاطمه ...

1)

الف) $y = (x - 2[\frac{x}{2}])^2$

$y = (2(\frac{x}{2} - [\frac{x}{2}]))^2 =$ $\boxed{R_f = [0, 4)}$

$2 \times 0 \le \bigcirc - [\bigcirc] < 1 \to 0 \le 2(\frac{x}{2} - [\frac{x}{2}]) < 2 \xrightarrow{(\ )^2} [0, 4)$

ج) $-\sin x + \log y - 4 = 0 \longrightarrow$

$\log y = 4 + \underbrace{\sin x} \to 3 \le \log y \le 5 \to \boxed{10^3 \le y \le 10^5}$

$-1 \le \sin x \le 1 \to 3 \le \sin x + 4 \le 5$

$\boxed{\to R_f = [10^3, 10^5]}$

2) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}} \to R_f = [a, b] \cup (c, +\infty) \to a + b + c = ?$

$f(x) = y \to y^2 = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \to x^2 y^2 - 9y^2 = x^2 - 4 \to x^2 y^2 - x^2 = 9y^2 - 4$

$\to x^2 (y^2 - 1) = 9y^2 - 4 \to x^2 = \frac{9y^2 - 4}{y^2 - 1} \longrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9y^2 - 4}{y^2 - 1}}$

$\pm\frac{2}{3}$

$\frac{9y^2 - 4}{y^2 - 1} \ge 0 \to$

± 1

-1		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		1	
$+$		$-$		$+$		$-$	$+$

0

$\to (y \ge 0)$?

$\sqrt{\ } = y \to y \ge 0$

$[0, \frac{2}{3}] \cup (1, +\infty) \to a + b + c = 0 + \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{5}{3}}$

۳) الف) $f(x) = x + \frac{1}{x} + 2\sqrt{x + \frac{1}{x}} + 1 - 1$

$\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}}+1\right)^2 - 1 = y \xrightarrow{\text{min}} \underset{\text{مقدار}}{} : (\sqrt{2}+1)^2 - 1 = 3 + 2\sqrt{2} - 1 = 2 + 2\sqrt{2}$

$\text{L} \underset{\text{مقدار}}{\text{max}} = (\infty + 1)^2 - 1 = y \to \infty \to \boxed{R_f = [2 + 2\sqrt{2}, +\infty)}$

ب) $y = (3 - \sin x)(1 + \sin x)$

$3 + 3\sin x - \sin x - \sin^2 x = -\sin^2 x + 2\sin x + 3$

$\text{min} = -1 \to -1 - 2 + 3 = 0$

$\text{max} = 1 \to -1 + 2 + 3 = 4$ $\Big\} \to \boxed{R_f = [0, 4]}$

$-\frac{b}{2a} = 1 \to -1 + 2 + 3 = 4$

---

۴) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 10 \to D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$f(x) = \{(1, \frac{29}{3})(2, \frac{28}{3})(3, 9)(4, \frac{26}{3})(5, \frac{25}{3})(6, 8)(7, \frac{23}{3})$

مثال: $1(-\frac{1}{3}) + 10$ $\quad (8, \frac{22}{3})(9, 7)\}$

$\text{مجموع } R_f = \frac{29}{3} + \frac{28}{3} + \underset{\frac{27}{3}}{9} + \frac{26}{3} + \frac{25}{3} + \underset{\frac{24}{3}}{8} + \frac{23}{3} + \underset{\frac{21}{3}}{7} + \frac{22}{3} = \dfrac{\frac{(29+21) \times 9}{2}}{3} = \dfrac{\frac{\cancel{50}^{25} \times \cancel{9}^{3}}{\cancel{2}_{1}}}{\cancel{3}_{1}}$

$= \boxed{75}$

5) $\sqrt{ax^2+bx+c} \to D_f=[2,+\infty) \to f(3)=1$

$\to R_g \quad \sqrt{bx^2+ax-2c}=\,?$

$\xrightarrow{f(3)=1} 9a+3b+c=1$

$f(2)\to \quad 4a+2b+c=0$

$5a+b=1 \to b=1-5a$

ما با جایگذاری مسئله را حل می‌کنیم

$4a+2(1-5a)+c=0 \to 4a+2-10a+c=0$

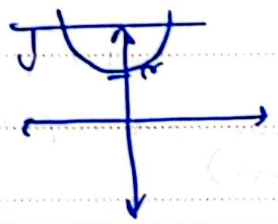
$-6a+c=-2 \to$

$9a+3(1-5a)+c=1 \to 9a+3-15a+c=1$

$-6a+c=-2$

a=0 ← با این مسئله فقط a=0 باشه
که دامنه به علت گرفتن ریشه در بیاید
بازه بسته یا اجتماع ۲ بازه نشود.

$\begin{cases} a=0 \\ c=-2 \\ b=1-5(0)=1 \end{cases} \to bx^2+ax-2c= x^2+4$

$\to \sqrt{x^2+4} \to$  $\to \boxed{R_g=[2,+\infty)}$

$\checkmark\; R_g=[2,+\infty)$

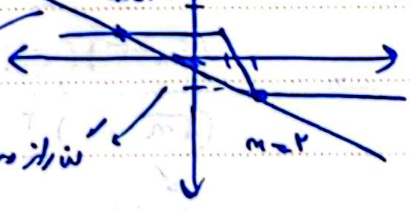
---

6) $\underbrace{|x-2|-|x-1|}_{\text{تابع تکه‌ای}}=kx \to$

خط مماس

$(2,-1) \to -1=k\times 2 \to \boxed{k=-\frac{1}{2}}$ جواب

تابع تکه‌ای →



در ۲ نقطه قطع می‌کند!
که یکی x=2 هست!
یکی x=1 !

گذرا از مبدأ ✓

۷) الف) $y = x[x] \quad [-2,2]$

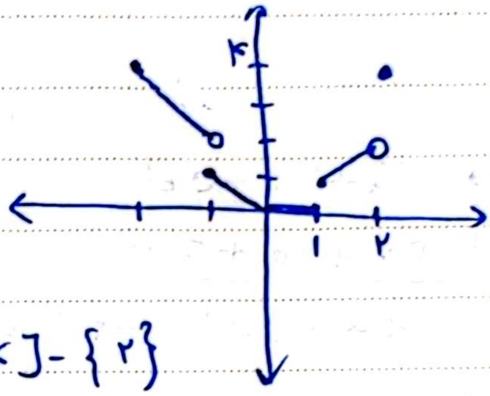
$[-2,-1) \to x \times -2 = -2x$

$[-1,0) \to x \times -1 = -x$

$[0,1) \to x \times 0 = 0$

$[1,2) \to x \times 1 = x$

$2 \to 4$ $\quad \to R_f = [0,4]-\{2\}$

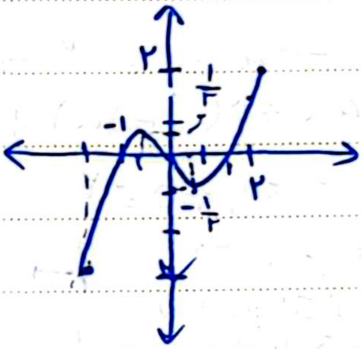


ب) $y = x|x| - x \quad [-2,2]$

$[-2,0] \to x(-x) - x = -x^2 - x$

$[0,2] \to x(x) - x = x^2 - x$

$R_f = [-2,2]$



۸) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\underbrace{x^2+x}_{x(x+1)}} \to R_f = \mathbb{R}-\{a,b\} \to a+b=?$

$\to x \neq \{0,-1\}$

$\frac{x+1+x+1}{x(x+1)} = y \to \frac{2\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}} = y \to \frac{2}{x} = y \to x \neq -1,$

$x \neq -1$ $\qquad y \neq -2,\ 0 \left(=\frac{a}{c}\right)$

$\frac{2+0}{x+0} \xrightarrow{\text{هم‌درجه}} \frac{a}{c} = 0 \qquad a,b = -2,0$

$a+b = -2+0 = \boxed{-2}$

۹) $f(x) = \frac{x-4\sqrt{x}+3}{x-2\sqrt{x}+1} \to \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} = y$

$x \neq 1$

$\to \sqrt{x} = -\frac{-y+3}{y-1} = \frac{y-3}{y-1} \to \frac{y-3}{y-1} \geq 0$

	1		3	
+		−		+

$\to R_f = (-\infty,1) \cup [3,+\infty)$

۱۳ | ۱۴۴۷ ۱۱ ربیع الاول **پنجشنبه** | 4
2025 September Thursday

10) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 2x^2 - x - 2 & x+1 \\ \hline -x^3 - x^2 & x^2 + x - 2 \\ x^2 - x - 2 & \\ -x^2 - x & \\ -2x - 2 & \\ +2x + 2 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{\cancel{(x+1)}(x^2+x-2)}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$x \neq 1, -1$

$$= \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = x+2 \to \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

$x \neq \pm 1 \to y \neq 1, 3$

$\to 1 + 3 = \boxed{4}$

روز تعاون - روز بزرگداشت ابوریحان بیرونی - روز علوم پایه

۱۴ | ۱۴۴۷ ۱۲ ربیع الاول **جمعه** | 5
2025 September Friday

ولادت حضرت رسول اکرم صلی الله علیه و آله به روایت اهل سنت (۵۳ سال قبل از هجرت) - آغاز هفته وحدت - شهادت آیت الله قدوسی و سرتیپ وحید دستجردی (۱۳۶۰ هـ ش)