Subject حسابان تألیفی ۴ Date　　　　دوازدهم دختر A　　$\underline{\underline{۱۹/۵}}$　　رونیا ابوکیا

①

الف) $y=\left(x-۲\left[\frac{x}{۲}\right]\right)^{۲} \Rightarrow y=\left(۲\left(\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]\right)\right)^{۲}$

$\Rightarrow \frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]\in[۰,۱) \Rightarrow ۲\left(\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]\right)\in[۰,۲)$ ✓

$\Rightarrow \left(۲\left(\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]\right)\right)^{۲}\in[۰,۴) \Rightarrow \boxed{R_f=[۰,۴)}$ ✓

②

ب) $-\sin x+\log y-۴=۰$

$\log y=\sin x+۴ \Rightarrow -۱\leqslant\sin x\leqslant۱ \Rightarrow$ ✓ $۳\leqslant\sin x+۴\leqslant۵$

$\Rightarrow ۳\leqslant\log y\leqslant۵ \Rightarrow ۱۰^{۳}\leqslant y\leqslant۱۰^{۵} \Rightarrow \boxed{R_f=[۱۰^{۳},۱۰^{۵}]}$ ✓

②

$f(x)=\sqrt{\frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}-۹}} \Rightarrow y=\frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}-۹}$ $\left.\begin{array}{l} x^{۲}=۰ \to y=\frac{۴}{۹} \\ x^{۲}=+\infty \to y=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow (-\infty,\frac{۴}{۲}]\cup(۱,+\infty)$

که می‌تواند منفی شود ← خارج دو عدد مطلوب است

②

$\Rightarrow R_f=\sqrt{(-\infty,\frac{۴}{۹}]\cup(۱,+\infty)}=[۰,\frac{۲}{۳}]\cup(۱,+\infty)=[a,b]\cup(c,+\infty)$ ✓

$\Rightarrow a+b+c=۰+\frac{۲}{۳}+۱=\boxed{\frac{۵}{۳}}$ ✓

③

الف) $f(x)=x+\frac{۱}{x}+۲\sqrt{x+\frac{۱}{x}}+۱-۱ \Rightarrow f(x)=\left(\sqrt{x+\frac{۱}{x}}+۱\right)^{۲}-۱$

$\Rightarrow x+\frac{۱}{x}\geqslant۲$ ق ق و $x+\frac{۱}{x}\leqslant-۲$ ← غ ق ق زیرا این عبارت زیر رادیکال است

$\Rightarrow x+\frac{۱}{x}\geqslant۲ \Rightarrow \sqrt{x+\frac{۱}{x}}\geqslant\sqrt{۲} \Rightarrow \left(\sqrt{x+\frac{۱}{x}}+۱\right)^{۲}\geqslant(\sqrt{۲}+۱)^{۲}$ پس باید همواره نامنفی باشد.

$\Rightarrow \left(\sqrt{x+\frac{۱}{x}}+۱\right)^{۲}-۱\geqslant(\sqrt{۲}+۱)^{۲}-۱ \Rightarrow y\geqslant(\sqrt{۲}+۱)^{۲}-۱ \Rightarrow y\geqslant۲+۲\sqrt{۲}$

$\Rightarrow \boxed{R_f=[۲+۲\sqrt{۲},+\infty)}$ ✓

②

(۳)

ب) $y = (۳ - \sin x)(1 + \sin x)$

$\Rightarrow y = -\sin^{۲} x + ۲\sin x + ۳$

$\xrightarrow{\sin x = -1} y = 0$

$\xrightarrow{\sin x = 1} y = ۴$

$\xrightarrow{\sin x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲}{-۲} = 1} y = ۴$

باهم برابرند.

$\Rightarrow y \in [0, ۴]$

$\boxed{\Rightarrow R_f = [0, ۴]}$ ✓

رونیا الویکی

④ $f(x) = -\frac{۱}{۳}x + ۱۰$ $\quad D_f = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

$\Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=\frac{۲۹}{۳}$ $\quad \Rightarrow x=۹ \Rightarrow y=\frac{۲۱}{۳} \Rightarrow$ $\frac{۲۹}{۳}+\frac{۲۱}{۳}=\frac{۵۰}{۳}$ ✓ جمع اولی و آخری، ②

$\Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=\frac{۲۸}{۳}$ $\quad \Rightarrow x=۸ \Rightarrow y=\frac{۲۲}{۳}$

$\Rightarrow$ مجموع اعداد خواسته شده $=(۴\times\frac{۵۰}{۳})+(۱\times\frac{۵۰}{۶}) = \frac{۲۰۰}{۳}+\frac{۲۵}{۳}=\frac{۲۲۵}{۳}=\boxed{۷۵}$ ✓

↳ مجموع اعضای برد این تابع $\quad$ ↳ عضو وسط که با چیزی جمع نمی‌شود.

⑤ $f(x)=\sqrt{ax^۲+bx+c}$ $\quad D_f=[۲,+\infty) \Rightarrow$ ۲ ریشه معادله است.

با توجه به $D_f$ متوجه می‌شویم عبارت زیر رادیکال، تابع درجه ۲ نبوده و خطی بوده است.

$\Rightarrow a=0$ ✓ $\Rightarrow f(x)=\sqrt{bx+c} \Rightarrow ۲b+c=۰$ ②

$f(۳)=۱ \Rightarrow f(۳)=\sqrt{۳b+c}=\sqrt{۳b+c}=۱ \Rightarrow \begin{cases} ۲b+c=۰ \\ ۳b+c=۱ \end{cases}$

$\Rightarrow b=۱$ ✓ $,\ c=-۲$ ✓

$\Rightarrow g(x)=\sqrt{x^۲+۴} \Rightarrow x^۲+۴ \in [۴,+\infty)$

$\Rightarrow R_g=\sqrt{[۴,+\infty)} \Rightarrow \boxed{R_g=[۲,+\infty)}$ ✓

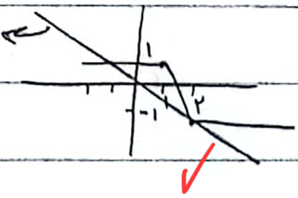
⑥ $|x-۲|-|x-۱|=kx$ → این تابع فرم آبشاری دارد.

$\downarrow$ ۲ $\quad \downarrow$ ۱

$kx$ ← در صورتی که اینگونه باشد، معادله دو جواب دارد. $\quad$ چون از مبدا می‌گذرد

②

$x=۲ \Rightarrow |x-۲|-|x-۱|=-۱ \Rightarrow$



✓

$x=۱ \Rightarrow |x-۲|-|x-۱|=۱$

$kx$، از دو نقطه $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ (مبدأ مختصات) و $\begin{vmatrix} ۲ \\ -۱ \end{vmatrix}$ می‌گذرد.

$\Rightarrow ۲k=-۱ \Rightarrow \boxed{k=-\frac{۱}{۲}} \rightarrow$ مقدار $k$ ✓

روناایوبی

⑦

الف) $y = x[x]$ $\quad x \in [-۲, ۲]$

$\Rightarrow x \in [-۲, -۱) \to y = -۲x$

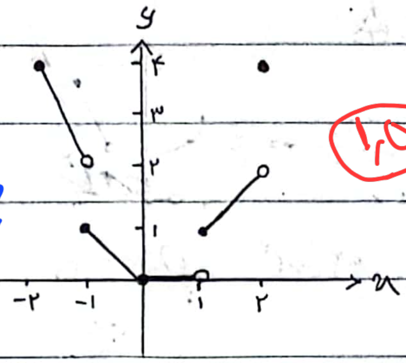
$x \in [-۱, ۰) \to y = -x$

$x \in [۰, ۱) \to y = ۰$

$x \in [۱, ۲) \to y = x$

$x = ۲ \to y = ۴$

$R_f = [۰, ۴] - \{۲\}$



۱٫۵

ب) $y = x|x| - x$ $\quad x \in [-۲, ۲]$

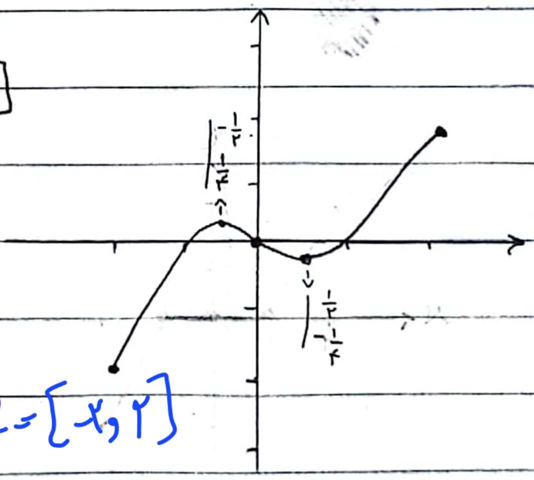
$\to -۲ < x < ۰ \Rightarrow y = -x^۲ - x$

$x \Rightarrow \frac{-b}{۲a} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۴}$

$\to ۰ < x < ۲ \Rightarrow y = x^۲ - x$

$\Rightarrow \frac{-b}{۲a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۴}$

$R_f = [-۲, ۲]$



⑧

$$y = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x+۱} + \frac{۱}{x^۲+x} \Rightarrow y = \frac{x+۱}{x^۲+x} + \frac{x}{x^۲+x} + \frac{۱}{x^۲+x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۲x+۲}{x^۲+x} = \frac{۲(x+۱)}{x(x+۱)} = \frac{۲}{x} \checkmark \Rightarrow x = \frac{۲}{y} \Rightarrow y \neq ۰$$

به شرط $x \neq -۱ \Rightarrow y \neq -۲$

۲

طبق صورت سوال $\to R_f = \mathbb{R} - \{a, b\} \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{-۲, ۰\}$ ✓

$\Rightarrow a + b = (-۲) + ۰ = \boxed{-۲}$ ✓

Subject ____________ Date ____________

رونیا ابوکیا

⑨

$$f(x) = \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{x - 2\sqrt{x} + 1} \Rightarrow f(x) = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} \checkmark$$

کمترین مقدار ممکن ← $\sqrt{x} = 0 \to \Rightarrow f(x) = \frac{-3}{-1} = 3 \to$ مقدار دقیق

بیشترین مقدار ممکن ← $\sqrt{x} = +\infty \to \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1} = 1 \to$ مقدار حدی

۲

خارج دو عدد برای تابع مضرب است $\Rightarrow$ مخرج نمی‌تواند صفر شود (به ازای $x=1$)

$$\Rightarrow \boxed{R_f = (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)} \checkmark$$

⑩

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2-1} = \frac{x^2(x+2)-(x+2)}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2-1}$$

۲

$\Rightarrow f(x) = x+2 \checkmark$ با شرط $x \neq \pm 1$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x \neq 1 \to y \neq 3 \\ x \neq -1 \to y \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{1, 3\} \checkmark$$

$$\Rightarrow 1 + 3 = \boxed{4} \checkmark$$