$y=\dfrac{x^2+x+2}{x-1} \rightarrow yx-y=x^2+x+2 \rightarrow x^2+(1-y)x+(2+y)=0$

$\Delta \geq 0 \longrightarrow b^2-4ac\geq 0 \longrightarrow (1-y)^2-4(2+y)\geq 0 \rightarrow y^2-6y-7\geq 0$ $\quad \begin{array}{ccccc} & -1 & & 7 & \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array}$ 1

$R_f=(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$ جواب

$y=-1 \xrightarrow{\text{بررسی}} x=-1$ ✓

$y=7 \xrightarrow{\text{بررسی}} x=3$ ✓

$x=1$ ریشه‌ی این معادله نمی‌تواند، چون اگر جایگذاری کنیم ۴ بدست می‌آید و محدودیتی ایجاد نمی‌کند

الف) $y=2x^2-5x+1 \xrightarrow{\text{سهمی دارای min}}$ برد $\rightarrow [y_{min},+\infty)$

$a>0 \rightarrow \begin{cases} x_{min}=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{5}{4} \\ y_{min}=2\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-5\left(\dfrac{5}{4}\right)+1=\dfrac{25}{8}-\dfrac{25}{4}+1=-\dfrac{17}{8} \end{cases} \longrightarrow R_f=\left[-\dfrac{17}{8},+\infty\right)$ جواب 2

ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5} \xrightarrow{\text{سهمی دارای max}}$ برد $\rightarrow (-\infty,y_{max}]$

$a<0 \rightarrow \begin{cases} x_{max}=-\dfrac{b}{2a}=3 \\ y_{max}=\sqrt{-9+18-5}=2 \end{cases} \longrightarrow R_f=\sqrt{(-\infty,2]}=[0,\sqrt{2}]$ جواب

ج) $y=\sqrt{x^7-3x^2+4x+1} \rightarrow$ توابع چندجمله‌ای که بزرگترین توانشان فرد است بردشان برابر با $\mathbb{R}$ می‌شود

اینجا به علت وجود رادیکال باید از $\mathbb{R}$ رادیکال بگیریم

$R_f=\sqrt{\mathbb{R}} \rightarrow R=[0,+\infty)$

د) $\log(x^3-6x^2+7x+4) \longrightarrow$ توابع چندجمله‌ای که بزرگترین توانشان فرد است بردشان برابر با $\mathbb{R}$ می‌شود

اینجا به علت وجود log از $\mathbb{R}$ لگاریتم می‌گیریم

$R_f=\log\mathbb{R} \rightarrow R=(-\infty,+\infty)$

الف) $y=\dfrac{3x+1}{2x-6} \xrightarrow{\text{هموگرافیک}} R=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{a}{c}\right\} \rightarrow R_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

ب) $y=\sqrt{\dfrac{4x+1}{x-2}} \xrightarrow{\text{هموگرافیک}} R=\sqrt{\mathbb{R}-\left\{\dfrac{a}{c}\right\}} \rightarrow R_f=\sqrt{\mathbb{R}-\{4\}} \longrightarrow R=[0,+\infty)-\{2\}$ 3

ج) $y=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}} \rightarrow \sqrt{x^2+3}=t \rightarrow t>0 \rightarrow x^2+4=(t^2-3)+4=t^2+1 \rightarrow y=\dfrac{t^2+1}{t} \rightarrow t+\dfrac{1}{t} \longrightarrow$

$\longrightarrow \sqrt{x^2+3}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} \longrightarrow$ کمترین مقداری که $\sqrt{x^2+3}$ می‌تواند داشته باشد $\rightarrow \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}} \rightarrow R_f=\left[\dfrac{4}{\sqrt{3}},+\infty\right)$

ادامه سوال ۳ ص بعد

$1)\ y = x^2 + \dfrac{1}{x^2+4} \longrightarrow$ کمترین مقدار x برابر با صفر است $\to$ کمترین مقدار $y = \dfrac{1}{4} \to R_f = [\dfrac{1}{4}, +\infty)$ ۳

$$y = \frac{3x^2+4}{x^2-1}$$

روش اصلی $\to y(x^2-1) = 3x^2+4 \to yx^2 - y = 3x^2+4 \to (y-3)x^2 - y - 4 = 0$

$x^2 = \dfrac{y+4}{y-3} \to y \neq 3,\ x^2 \geq 0 \to \dfrac{y+4}{y-3} \geq 0$ ۴

$$\begin{array}{ccccc} & -4 & & 3 & \\ + & \bullet & - & \circ & + \end{array}$$

$R_f = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$

روش مربع $\to \dfrac{3x^2+4}{x^2-1}$

x^2 بیشترین مقدار $= \infty \to 3$ (کمترین)

x^2 کمترین مقدار $= 0 \to -4$

مخرج نمی‌تواند صفر شود $R_f = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$

$$y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3}$$

روش اصلی $\to y\sin x + 3y = 2\sin x - 1 \to y\sin x - 2\sin x = -1 - 3y \to \sin x(y-2) = -1-3y \to$

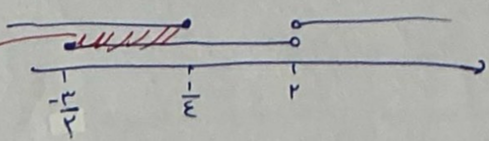
$\to \sin x = \dfrac{-1-3y}{y-2} \to y \neq 2,\ -1 \leq \sin x \leq 1 \to -1 \leq \dfrac{-1-3y}{y-2} \leq 1$ ۵

$\dfrac{-1-3y}{y-2} \geq -1 \to \dfrac{-1-3y}{y-2} + 1 \geq 0 \to \dfrac{-1-3y+y-2}{y-2} \geq 0 \to \dfrac{-2y-3}{y-2} \geq 0$

$$\begin{array}{ccccc} & -\frac{3}{2} & & 2 & \\ - & \bullet & + & \circ & - \end{array} \longrightarrow [-\tfrac{3}{2}, 2)$$

$\dfrac{-1-3y}{y-2} \leq 1 \to \dfrac{-1-3y}{y-2} - 1 \leq 0 \to \dfrac{-1-3y-y+2}{y-2} \leq 0 \to \dfrac{-4y+1}{y-2} \leq 0$

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{1}{4} & & 2 & \\ - & \bullet & + & \circ & - \end{array} \longrightarrow (-\infty, \tfrac{1}{4}] \cup (2, +\infty)$$



جواب $R_f = [-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}]$

روش مربع $\to \dfrac{2\sin x - 1}{\sin x + 3}$

$\sin x$ بیشترین مقدار $= 1 \to \dfrac{1}{4}$

$\sin x$ کمترین مقدار $= -1 \to -\dfrac{3}{2}$

مخرج نمی‌تواند صفر شود چون $\sin x$ نمی‌تواند -3 شود $R_f = [-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}]$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2 - x + 1}$$

① $y \neq 1$

$\frac{y-1 \pm \sqrt{4(y-1)(y-\frac{1}{4})}}{2y-2}$

$D_f \to x^2 - x + 1 \neq 0 \longrightarrow$ مخرج $\Delta < 0$ دارد همواره + است $\to \boxed{D_f = R}$ جواب ۳

$R_f \to yx^2 - yx + y = x^2 - x + \frac{1}{4} \longrightarrow (y-1)x^2 + (1-y)x + (y - \frac{1}{4}) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \xrightarrow{y-1=a} (-a)^2 - 4a(a + \frac{3}{4}) = a^2 - 4a^2 - 3a = -3a(a+1) = -3y(y-1)$

$\Delta \geq 0 \longrightarrow -3y(y-1) \geq 0$ — $\begin{array}{ccccc} & 0 & & 1 & \\ - & & + & & - \end{array}$ $\longrightarrow R_f = ① \cap ② \longrightarrow [0,1)$

$[0,1]$ ②

جواب

6

الف) $y = |2x-2| - |x-3|$

1		3
$2-2x+x-3$	$2x-2+x-3$	$2x-2-x+3$
$-x-1$	$3x-5$	$x+1$
$y(1) = -2$	$y(1) = -2,\ y(3) = 4$	$y(3) = 4$
$[-2, +\infty)$	$[-2, 4]$	$[4, +\infty)$
①	②	③

$R \longrightarrow ① \cap ② \cap ③ \to [-2, +\infty)$

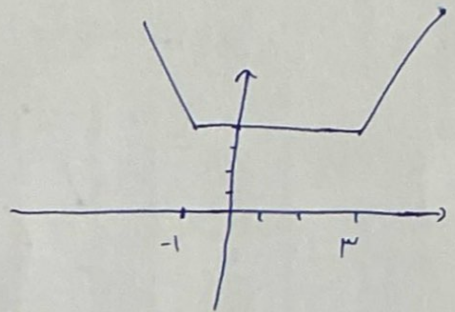
جواب

7 ✓

ب) $y = |x-3| + |x+1|$

$x = 3$ $\qquad$ $x = -1$

تابع گلدانی است



کف نمودار را به اندازه اختلاف ریشه ها بالا می برد $\longrightarrow y = 4 \longrightarrow R_f = [4, +\infty)$

$|x-2| - |2x+2| \leq 1$

$x = 2$ $\qquad$ $x = -1$

-1		2
$2-x+2x+2 \leq 1$	$2-x-2x-2 \leq 1$	$x-2-2x-2 \leq 1$
$\boxed{x \leq -3}$	$3x \geq -1 \to \boxed{x \geq -\frac{1}{3}}$	$-x \leq 5 \to \boxed{x \geq -5}$
$(-\infty, -3]$	$[-\frac{1}{3}, 2]$	$(2, +\infty)$

جواب $\to (-\infty, -3] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty)$

8

الف) $y=[x]+[3-x] \to [x]+[-x]+3$

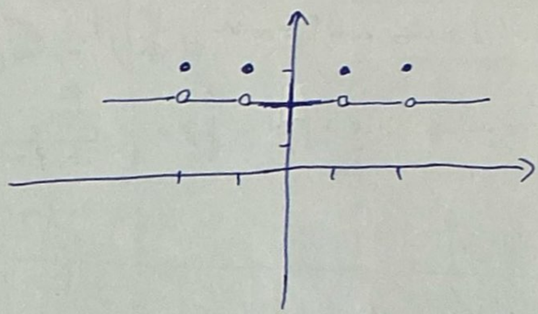
$x\in[-2,-1) \to [x]=-2\ ,\ 3-x\in(5,4) \to [3-x]=4 \to f(x)=2$

$x\in[-1,0) \to [x]=-1\ ,\ 3-x\in(4,3) \to [3-x]=3 \to f(x)=2$ ۹

$x\in[0,1) \to [x]=0\ ,\ 3-x\in(3,2) \to [3-x]=2 \to f(x)=2$

$x\in[1,2) \to [x]=1\ ,\ 3-x\in(2,1) \to [3-x]=1 \to f(x)=2$

$x=2 \to [x]=2\ ,\ [3-2]=[1]=1 \to f(2)=3$



$R_f=\{2,3\}$

ب) $y=3x-[x]$

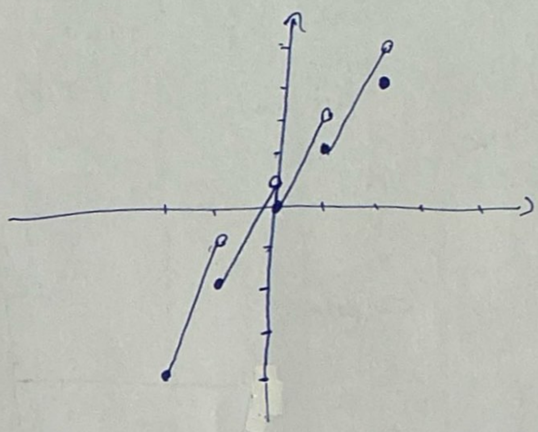
$x\in[-2,-1) \to 3x+2$

$x\in[-1,0) \to 3x+1$

$x\in[0,1) \to 3x$

$x\in[1,2) \to 3x-1$

$x=2 \to 4$



$R_f=[-4,5)$

الف) $y=\sin^2 x-\sin x+1$

$\sin x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2} \to f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$ min

$\sin x=1 \to y=1$ ۱۰

$\sin x=-1 \to y=3$ max

$R_f=[\frac{3}{4},3]$

ب) $y=\sin^4 x+\sin^2 x+1 \to (\sin^2 x)^2+\sin^2 x+1$

$\sin^2 x=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$ × غ‌ق‌ق

$\sin^2 x=0 \to y=1$

$\sin^2 x=1 \to y=3$

$R_f=[1,3]$