نگین نکوئی — دوازدهم دفتر A — تکلیف ۳

۱- در روش اصلی x را از معادله خارج و سپس دامنه را حساب می‌کنیم

$$y=\frac{x^2+x+2}{x-1} \Rightarrow yx-y=x^2+x+2$$

$$-x^2+(y-1)x-y-2=0 \rightarrow x^2+(1-y)x+2+y=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x=\frac{-(1-y)\pm\sqrt{(1-y)^2-4(2+y)}}{2} \Rightarrow (1-y)^2-4(2+y)\geqslant 0$$

$\Delta\geqslant 0$

$$y^2+1-2y-8-4y\geqslant 0$$

$$y^2-6y-7\geqslant 0$$

$$(y-7)(y+1)\geqslant 0$$

$$\begin{array}{ccccc} & -1 & & 7 & \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$R_f=(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$$

۲- الف) $2x^2-5x+1$ ، $a>0$

$$\begin{cases} x_{min}=\frac{-b}{2a}=\frac{5}{4} \\ y_{min}=2\times\frac{25}{16}-5\times\frac{5}{4}+1=\frac{25}{8}-\frac{25}{4}+1=\frac{25-50+8}{8}=\frac{-17}{8}\end{cases}$$

$$R_f=[-\frac{17}{8},+\infty)$$

ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ — ابتدا عبارت را بدون رادیکال حساب و سپس رادیکال را تأثیر می‌دهیم

$$\begin{cases} x_{max}=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{-2}=3 \\ y_{max}=-(3)^2+6(3)-5=-9+18-5=4\end{cases}$$

$$f(x)=-x^2+6x-5 \longrightarrow R_f=(-\infty,4] \longrightarrow R_{\sqrt{f(x)}}=[0,2]$$

ج) $y=\sqrt{x^7-3x^2+3x+1} \rightarrow R_f=[0,+\infty)$ — چون نباید منفی باشد

اگر رادیکال نداشت چون برد تمام توابع از مرتبه فرد برابر R است برد آن برابر R بود

اما چون زیر رادیکال حتی نتواند منفی باشد داریم: جواب آن

د) $\log(x^3-6x^2+7x+4) \rightarrow (-\infty,+\infty)$ — چون تابع از مرتبه فرد است برد R است. و لگاریتم نیز همینطور است

۳- الف) $y=\frac{3x+1}{2x-2} \xrightarrow[\text{هموگرافیک}]{\text{توجه به روش}} y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow R-\{\frac{a}{c}\} \Rightarrow R_f=R-\{\frac{3}{2}\}$

ب) $y=\sqrt{\frac{4x+1}{x-2}} \xrightarrow{\text{توجه به هموگرافیک}} R_f=[0,+\infty)-\{2\}$

$\frac{a}{c}=4 \rightarrow \sqrt{\frac{a}{c}}=2$ — چون زیر رادیکال نامنفی است و جواب رادیکال نیز در برد آن منفی است

ج) $y=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

کمترین مقدار $\sqrt{x^2+3}=\sqrt{3}$

$$R_f=[\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty)$$

چهارتا اضافه و سپس کم کنیم.

۳) $x^2+4+\dfrac{1}{x^2+4}-4$

$4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

کمترین مقدار $\Rightarrow x^2+4=0+4=4$

$[\frac{17}{4},+\infty) \xrightarrow{-4} [\frac{1}{4},+\infty)$

۴-

$y=\dfrac{3x^2+4}{x^2-1} \xrightarrow{\text{روش اصلی}} yx^2-y=3x^2+4$

$y-3\neq 0$

$y\neq 3$

$b=0$

$(y-3)x^2-y-4=0 \Rightarrow y=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=0-4(y-3)(-y-4)$

$\Rightarrow \Delta\geq 0$

$\Delta=(4y+12)(y-3)$

یا $(3-y)x^2=-(4+y) \Rightarrow x^2=\dfrac{y+4}{y-3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{y+4}{y-3}} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

-4		3	
$+$	$-$	غ ق	$+$

تغییر کردیم $\to 0\leq x^2<+\infty \to \dfrac{3(0)+4}{0-1}=\dfrac{4}{-1}=-4$

$\to 3$

$x^2-1=0$

$x^2=\pm 1$ مخرج نباید صفر باشد

$\to R_f=R-[-4,+3]=(-\infty,-4]$

$\cup\ (3,+\infty)$

۵-

$y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+3} \xrightarrow{\text{روش اصلی}} y\sin x+3y=2\sin x-1$

$(2-y)\sin x=3y+1 \Rightarrow \sin x=\dfrac{3y+1}{2-y}$

فرض نمی‌تواند صفر باشد $\to -y+2\neq 0 \to y\neq 2 \to -1\leq \sin x\leq 1$

$-1\leq\dfrac{3y+1}{2-y}\leq 1$: $\dfrac{3y+1-2+y}{2-y}\leq 0$ ، $\dfrac{3y+1+2-y}{2-y}\geq 0$

$\dfrac{4y-1}{2-y}\leq 0$ (1) و $\dfrac{2y+3}{2-y}\geq 0$ (2)

$\frac{1}{4}$		2	
$-$	$+$	غ ق	$-$

-1.5		2	
$-$	$+$	غ ق	$-$

$(1)\cap(2) \to R_f=[-\frac{3}{2},\frac{1}{4}]$

حل تر ادم $\to y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+3}$

$\min \sin x=-1 \to \dfrac{2(-1)-1}{(-1)+3}=\dfrac{-3}{2}$

$\max \sin x=+1 \to \dfrac{1}{4}$

$R_f=[-\frac{3}{2},\frac{1}{4}]$

۶-

$f(x)=\dfrac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1}=\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{x^2-x+1}$ همواره نامنفی

$\Delta<0$

$a>0$ همواره مثبت است

$D_f=R$

$yx^2-yx+y=x^2-x+\frac{1}{4}$

$x^2(y-1)+(-y+1)x+y-\frac{1}{4}=0 \to x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2(y-1)}$

$y-1\neq 0$

$y\neq 1$

$\Delta\geq 0 \to b^2-4ac\geq 0$

$(-y+1)^2-4(y-1)(y-\frac{1}{4})\geq 0$

$y^2-\frac{5}{4}y+\frac{1}{4}$

$y^2+1-2y-4y^2+5y-1\geq 0$

$-3y^2+3y\geq 0$

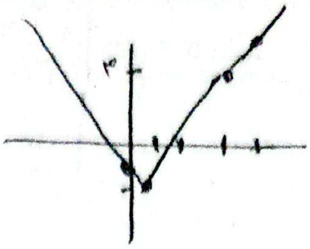
$3y(-y+1)\geq 0$

0		1	
$-$	$+$		$-$

$R_f=[0,1)$

۷- بازه‌بندی

$y=|2x-2|-|x-3|$



$1 \quad 3$

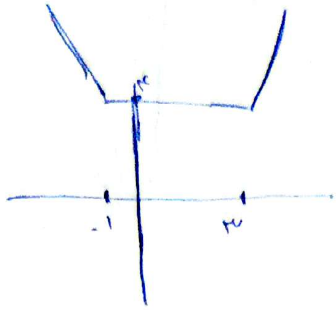
$2-2x-3+x = -x-1$

$2x-2+x-3 = 3x-5$

$2x-2-x+3 = x+1$

$R_f=[-2,+\infty)$

$y=|x-3|+|x+1|$



دو طرفی

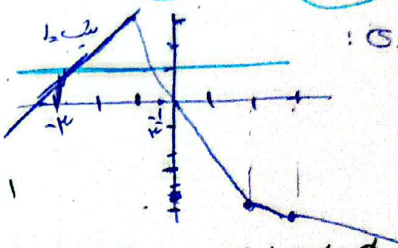
$x-3=0$, $x=3$

$x+1=0$, $x=-1$

$R_f=[4,+\infty)$

۸- بازه‌بندی:

$|x-2|-|2x+2|\le 1$



$-1 \quad 2$

$x-2-2x-2\le 1$

$-x-4\le 1$

$-5\le x \cap x\ge 2 \to x\in$ ∅

$2-x-2x-2\le 1$

$-3x\le 1$

$-\frac{1}{3}\le x$

$\cap$

$-1\le x\le 2$

$[-1,-\frac{1}{3})$

$2-x+2x+2\le 1$

$x+4\le 1$

$x\le -3$

$\cap$

$x\le -1$

$x\in(-\infty,-3]$

$x\in R-(-3,\frac{1}{3}]$

۹-

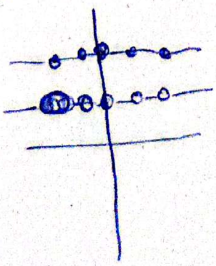
الف) $y=[x]+[3-x]$

$\Rightarrow [x]+[-x]+3$

می‌دانیم این قرار دارد

$x\in Z \to y=0 \xrightarrow{+3} y+3=3$

$x\notin Z=-1 \xrightarrow{+3} y+3=2$



R_f

ب) $y=3x-[x]$

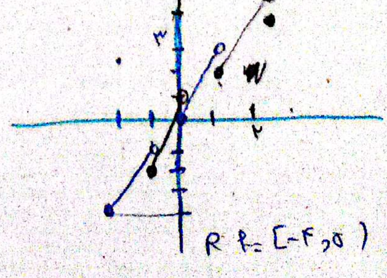
$-2\le x<-1 \to [x]=-2 \to 3x+2 \begin{cases}3(-2)+2=-4\\ 3(-1)+2=-1\end{cases}$

$-1\le x<0 \to [x]=-1 \to y=3x+1 \begin{cases}3(-1)+1\\ 3(0)+1\end{cases}$

$0\le x<1 \to [x]=0 \to y=3x \begin{cases}0\\ 3\end{cases}$

$1\le x<2 \to [x]=1 \to y=3x-1 \begin{cases}3(1)-1\\ 3(2)-1\end{cases}$

$x=2 \to [x]=2 \to 3x-2 = 3(2)-2 = 4$



$R_f=[-4,5)$

۱۵-

$y = \sin^2 x - \sin x + 1 \longrightarrow \sin x \begin{cases} (-1)\ min \rightarrow 1+1+1=3 \\ (1)\ max \rightarrow 1-1+1=3 \\ \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} \end{cases}$

$R_f = [\frac{3}{4}, 3]$

$y = \sin^4 + \sin^2 x + 1 \rightarrow \sin^2 x \begin{cases} (1)\ max \rightarrow 1+1+1=3 \\ (0)\ min \rightarrow 0+0+1 \\ \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} \rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$

$R_f: [1, 3]$